

Modelo Elastoplástico Micropolar con aplicación de Microplanos

Marcela Nieto¹

(1) *Instituto de Materiales, Estructuras y Construcciones. Universidad Nacional de Santiago del Estero.*

mnieto@unse.edu.ar

RESUMEN: Este trabajo tiene como objetivo extender la teoría micropolar de microplanos, con el fin de obtener ecuaciones constitutivas y modelos que incluyan información más precisa de la compleja microestructura de los materiales ingenieriles. El principal objetivo de la presente línea de trabajo es el modelado macroscópico y la descripción del comportamiento de respuesta de materiales anisotrópicos por medio de la conocida teoría de microplanos cuando se aplica en continuos de Cosserat. Teniendo en cuenta la capacidad de esta teoría para modelar comportamientos anisotrópicos la misma se usará para describir la respuesta de hormigones adicionados con fibras, incorporando a la modelación, la resistencia de las fibras de acero a la tracción una vez alcanzada la resistencia máxima del hormigón, así como también el efecto “dowel” de la fibra de hormigón que se pretende actúa atravesando el material resultando en un mecanismo de transferencia de los esfuerzos de corte que producen la fisuración del material.

1 INTRODUCCION

Los materiales cohesivo friccionales muestran una gran diferencia entre sus resistencias de tracción y compresión y una fuerte sensibilidad a la presión lateral. La falla depende fuertemente de los estados tensionales y de propiedades microscópicas. La necesidad de incorporar la microscopía en las descripciones del comportamiento material, surge porque a medida que avanza el conocimiento se continúan encontrando propiedades y características microscópicas que influyen en la respuesta macroscópica. Por lo tanto la modelación de esta falla requiere de formulaciones, si bien macroscópicas, contengan información relevante de las propiedades microscópicas y del estado y variación de estas propiedades durante los procesos de falla.

El potencial de la teoría para describir comportamiento de respuesta no lineal de materiales de ingeniería cohesivo friccionales como el hormigón ha sido extensamente demostrado en las primeras contribuciones de Bazant y coautores, y mas recientemente en trabajos de Bazant y Prat [BP88], Carol y Bazant [CBP91] [CBP92], y otros muchos autores. Recientemente la falta de una aproximación termodinámicamente consistente para derivar formulaciones basadas en microplanos ha sido estudiada por Carol y otros [CB97] que demostraron que la satisfacción de la segunda ley de la Termodinámica no puede generalmente garantizarse.

Para resolver esta limitación fundamental propusieron un método para derivar formulaciones constitutivas en microplanos

dentro de un marco termodinámicamente consistente por medio de la incorporación de la Energía libre de Helmholtz en cada microplano. Este concepto fue extendido exitosamente para el comportamiento material inelástico como en plasticidad y daño por Khul y otros [KR98] [KRW00], [KSC01]. Sin embargo este trabajo así como el previo de Carol y otros [CJB01] conciernen al continuo clásico de Boltzman (elástico e inelástico)

A pesar de las ventajas de la teoría de micro planos y los considerables progresos en los modelos relacionados desde la propuesta original de Taylor, todavía hay preguntas abiertas y la mas relevante es la de cómo incorporar mas información microscópica detallada en las ecuaciones globales constitutivas capaces de reproducir comportamientos materiales particulares. Aquí la aproximación termodinámicamente consistente para derivar modelos de micro planos se extiende para los continuos micropolares en el espíritu de Cosserat y Cosserat [CC09]. El principal objetivo es el de enriquecer la cinemática microscópica y la capacidad de la formulación de micro planos de reproducir particulares y mas complejos comportamientos de la estructura interna de materiales compuestos cuasi frágiles como el hormigón en los que la presencia de agregados contribuye al desarrollo de microrotaciones en planos característicos durante su historia de carga mas allá del límite elástico.

La segunda motivación de la teoría micropolar de microplanos es relacionada con la regularización de las predicciones de pospico [dBo91]. En este sentido la incorporación de la longitud característica a nivel microscópico conduce a una relación constitutiva intrínsecamente no local

cuando se activan los grados de libertad adicionales del continuo micropolar. Esta longitud característica cuanta para obtener objetividad de las mallas durante las simulaciones de comportamientos de ablandamiento en elementos finitos.

El tercer aspecto es su capacidad de modelar comportamiento material anisotrópico. Actualmente, este es uno de los objetivos más importantes de la propuesta de Taylor (1938), la cual se basa en la definición de relaciones totalmente independientes entre tensiones – deformaciones uniaxiales en algunos planos del material. Como consecuencia se observa una tendencia definida a usar modelos macroscópicos basados en fundamentales aspectos de la estructura microscópica de los materiales. La teoría de microplanos fue introducida por Bazant – Gambarova (1984), Bazant (1976), y Bazant – Oh (1985) (1986), sobre la base de la idea original de G. I. Taylor.

La principal suposición de la teoría de microplanos es la relación entre las componentes de deformaciones o tensiones local o microscópica y el correspondiente tensor global o macroscópico. En consecuencia, deben considerarse dos aproximaciones, la restricción estática o la cinemática requiere que las deformaciones o las tensiones sobre cada microplano sean las componentes resueltas de sus contrapartes macroscópicas. El potencial de la teoría para describir comportamiento de respuesta no lineal de materiales de ingeniería cohesivo friccionales como el hormigón ha sido extensamente demostrado en las primeras contribuciones de Bazant y coautores, y más recientemente en trabajos de Bazant y Prat (1988), Carol y Bazant (1991) (1992), y otros muchos autores. Recientemente la falta de una aproximación termodinámicamente consistente para derivar formulaciones basadas en microplanos ha sido estudiada por Carol y otros que demostraron que la satisfacción de la segunda ley de la Termodinámica no puede generalmente garantizarse.

Para resolver esta limitación fundamental propusieron un método para derivar formulaciones constitutivas en microplanos dentro de un marco termodinámicamente consistente por medio de la incorporación de la Energía libre de Helmholtz en cada microplano. Este concepto fue extendido exitosamente para el comportamiento material inelástico como en plasticidad y daño por Khul y otros (1998) (2000) (2001). Estos trabajos así como los previos de Carol, Jirasek, Bazant,(2001) conciernen al

continuo clásico de Boltzman (elástico e inelástico).

2 TEORÍA DE MICROPLANOS

El comportamiento de respuesta macro mecánico de materiales está controlado por ecuaciones constitutivas de planos característicos o microplanos por medio de restricciones cinemáticas o estáticas, lo que requiere que tanto las tensiones como las deformaciones en cada microplano deben ser derivadas por proyección de su contraparte macroscópica.

2.1 Tensiones y Deformaciones

En el caso de restricción estática los vectores de tensiones microscópicas en cada microplano, se obtienen premultiplicando por los vectores normales del microplano n :

$$\bar{t}_\sigma = \sigma \cdot n = \sigma_N \cdot n + \bar{\sigma}_T \quad (1)$$

Y los momentos tensionales

$$\bar{t}_\mu = \mu \cdot n = \mu_N \cdot n + \bar{\mu}_T \quad (2)$$

como se muestra en las Fig.1 y 2:

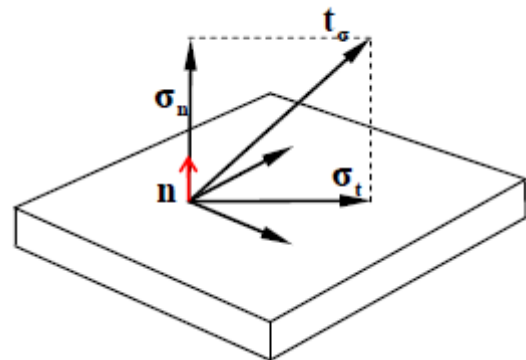


Figura 1. Componentes de tensiones en microplanos.

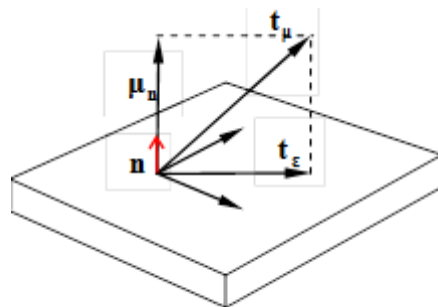


Figura 2. Componentes de momentos tensionales en microplanos.

Las componentes normal y tangencial de las tensiones de microplanos se obtienen como proyección de la contraparte macroscópica de acuerdo con las relaciones:

$$\bar{\sigma}_N = \mathbf{N} : \boldsymbol{\sigma} \quad \bar{\sigma}_T = \mathbf{T} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3)$$

$$\bar{\mu}_N = \mathbf{N} : \boldsymbol{\mu} \quad \bar{\mu}_T = \mathbf{T} : \boldsymbol{\mu} \quad (4)$$

El tensor de proyección de segundo y de tercer orden \mathbf{N} y \mathbf{T} son definidos como

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (5)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (6)$$

$$\mathbf{T}^{sym} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}^{sym} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad \mathbf{T}^{skw} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}^{skw}$$

Con $[\mathbf{I}]_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$, el tensor identidad de cuarto orden y \mathbf{n} el vector normal al plano.

En el caso de restricciones cinemáticas los vectores de deformación en cada microplano están dadas por pos multiplicación con el vector normal de cada microplano

$$\mathbf{t}_\epsilon = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n} = \epsilon_N \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\epsilon}_T \quad (7)$$

como se muestra en la Fig.3:

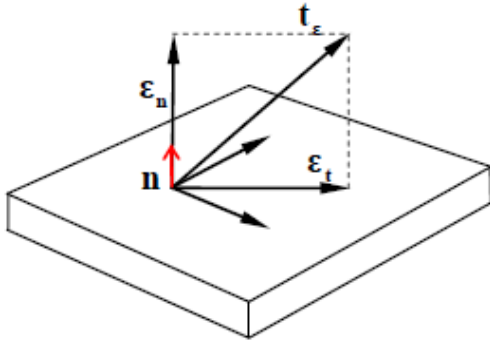


Figura 3. Componentes de deformaciones en microplanos.

Y los vectores de microcurvaturas:

$$\mathbf{t}_\kappa = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{n} = \kappa_N \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\kappa}_T \quad (8)$$

Se muestran en la Fig.4

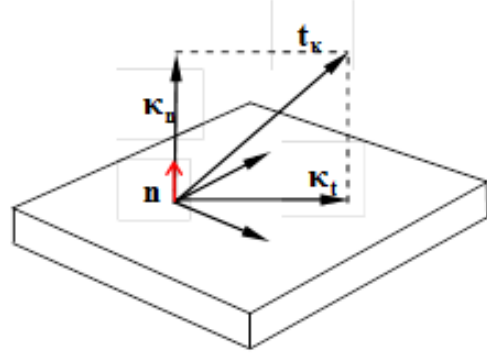


Figura 4. Componentes de microcurvaturas en microplanos.

3 ELASTOPLASTICIDAD EN MICROPLANOS

El tipo de comportamiento de respuesta elastoplástico del continuo clásico está caracterizado por la descomposición aditiva del tensor de deformación macroscópico total en las componentes elásticas y plásticas

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_e + \boldsymbol{\kappa}_p \quad (10)$$

La suposición de restricción cinemática extiende la aplicabilidad de la descomposición aditiva al nivel microscópico. Como consecuencia, las componentes de deformación total en los microplanos pueden ser expresadas como:

$$\epsilon_N = \epsilon_{Ne} + \epsilon_{Np} \quad \kappa_N = \kappa_{Ne} + \kappa_{Np} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_T^{sym} = \boldsymbol{\epsilon}_{Te}^{sym} + \boldsymbol{\epsilon}_{Tp}^{sym} \quad \boldsymbol{\kappa}_T^{sym} = \boldsymbol{\kappa}_{Te}^{sym} + \boldsymbol{\kappa}_{Tp}^{sym}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_T^{skw} = \boldsymbol{\epsilon}_{Te}^{skw} + \boldsymbol{\epsilon}_{Tp}^{skw} \quad \boldsymbol{\kappa}_T^{skw} = \boldsymbol{\kappa}_{Te}^{skw} + \boldsymbol{\kappa}_{Tp}^{skw}$$

Las tensiones sobre cada microplano son debidas a las deformaciones solo el microplanos correspondiente caracterizado por su normal \mathbf{n} .

En el nivel macroscópico las ecuaciones constitutivas elastoplásticas pueden ser expresadas como

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{ep}^{uu} & \mathbf{E}_{ep}^{u\omega} \\ \mathbf{E}_{ep}^{\omega u} & \mathbf{E}_{ep}^{\omega\omega} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

con los operadores elastoplásticos

$$\mathbf{E}_{ep}^{uu} = \mathbf{E}_0^{uu} - \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\mathbf{n}}_u \otimes \tilde{\mathbf{m}}_u d\Omega \quad (11)$$

$$E_{ep}^{u\omega} = -\frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\mathbf{n}}_u \otimes \tilde{\mathbf{m}}_{\omega} d\Omega$$

$$E_{ep}^{\omega u} = -\frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\mathbf{n}}_{\omega} \otimes \tilde{\mathbf{m}}_u d\Omega$$

$$E_{ep}^{\omega\omega} = E_0^{\omega\omega} - \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} \tilde{\mathbf{n}}_{\omega} \otimes \tilde{\mathbf{m}}_{\omega} d\Omega$$

Que es el Módulo Elastoplástico tangente del sistema discretizado que debe integrarse en la esfera de radio unitario.

4 MODELO DE DRUCKER PRAGER MICROPOLAR

El modelo clásico o macroscópico elastoplástico de Drucker Prager para continuos cosserat, está caracterizado por la condición de fluencia

$$\Phi^{mac} = \alpha^{mac} I_1 + \sqrt{3 \cdot J_2} - \phi^{mac} = 0 \quad (12)$$

con

$$\phi^{mac} = \bar{\sigma}_y^{mac} + E_p^{mac} \cdot \xi^{mac} \quad (13)$$

donde el primer invariante de tensiones

$$I_1 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} = tr[\boldsymbol{\sigma}] \quad (14)$$

este modelo de dos parámetros está caracterizado por el ángulo de fricción α^{mac} y la tensión de fluencia $\bar{\sigma}_y^{mac}$, que puede expresarse en función de las resistencias de tracción y compresión del material

$$\alpha^{mac} = \frac{f_c - f_t}{3} \quad \bar{\sigma}_y^{mac} = \frac{f_c \cdot f_t}{3} \quad (15)$$

5 ANALISIS NUMERICO

Se analizan las predicciones del modelo elastoplástico de Drucker Prager para continuos cosserat basados en microplanos para ensayos de tracción y compresión uniaxial y corte simple, desarrollado en una descomposición en 42 direcciones de microplanos de la esfera representativa del punto material.

En el ensayo de corte simple, que se muestra en la Fig. 5, se consideraron restricciones totales de desplazamientos y rotaciones en los nodos localizados en la base del elemento cuadrilátero mientras sólo los desplazamientos verticales se restringen en los otros nodos.

Por otra parte, en el caso de tracción y compresión uniaxial, la restricción total de desplazamiento y rotación ha sido solo considerada en un nodo del elemento como se indica en la Fig. 6 mientras sobre otros nodos tienen solo una posibilidad de desplazamiento.

Las rotaciones son restringidas de forma similar al del ensayo de tracción uniaxial de probetas cilíndricas, considerando la doble simetría del problema.

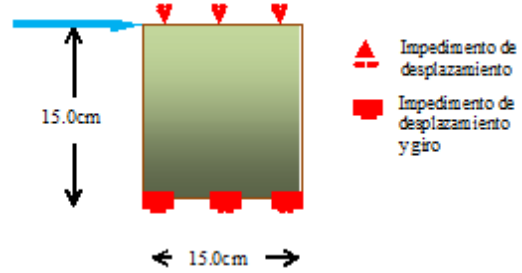


Figura 5. Ensayo de corte simple

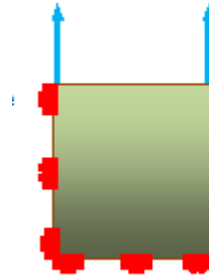


Figura 6. Ensayo de tracción uniaxial. Estado de deformaciones planas.

Los parámetros elásticos de Cosserat en microplanos para el análisis numérico se muestran en la Tabla 1.

E	30.000 N/mm ²
ν	0.2
G	12.500 N/mm ²
G_c	6.250 N/mm ²
l_c	15 mm
E_{Nu}	12.500 N/mm ²
E_{Tu}^{sym}	21.667 N/mm ²
E_{Tu}^{skw}	12.500 N/mm ²
$E_{T\omega}^{sym}$	12.500 N/mm ²
$E_{T\omega}^{skw}$	12.500 N/mm ²

Tabla 1.- Parámetros materiales

En la fig.7 se muestran los valores que arroja el ensayo de tracción corte simple para las funciones de fluencia de Drucker Prager, en la que se ha incorporado una función de ablandamiento exponencial que permita modelar la fuerte caída de la resistencia del material en un ensayo de compresión uniaxial. Se compara con resultados experimentales del ensayo.

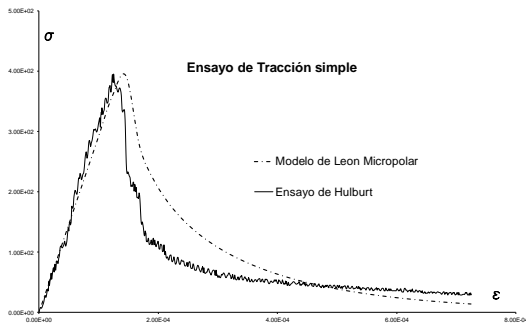


Figura 7. Ensayo de tracción simple

En la fig.8 se muestran los valores que arroja el ensayo de corte simple para las funciones de fluencia de Drucker Prager, comparando los resultados con el modelo Micropolar clásico, en plasticidad perfecta.

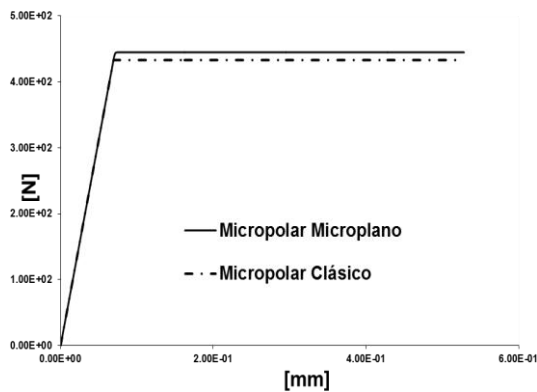


Figura 8. Ensayo de corte simple

6 HORMIGONES REFORZADOS CON FIBRAS

En los últimos años se puede ver la tendencia creciente de obtener hormigones con prestaciones mayores tanto sea en su resistencia característica como en su desempeño en régimen de postpico. Con este objetivo se incorporan a los hormigones convencionales aditivos químicos (plastificantes, superplastificantes, retardadores de fragüe, incorporadores de aire), y en muchos casos

también adiciones minerales como *fly ash* o *silica fume*, o cemento de escoria. Además, pueden agregarse fibras para mejorar la ductilidad. Este último es el caso que se pretende modelar.

La adición de fibras a este material mejora su tenacidad, controla la fisuración y aumenta su resistencia a esfuerzos de flexotracción.

La capacidad de la teoría de microplanos de modelar comportamiento material anisotrópico se considera una importante ventaja a la hora del modelado del comportamiento de este material cuyas propiedades se tornan anisotrópicas con el adiconado de fibras.

Una formulación continua, basada en la teoría de microplanos no lineal combinado con la bien conocida "teoría mezcla" se considera para describir los efectos de la fibra en el comportamiento de fallo del hormigón adiconado. La interacción entre las fibras de acero matriz de cemento se simula en función de efecto de puente en la fisura y la adicional acción de clavija (dowel effect), como se trató de manera similar en un modelo discontinuo formulado previamente por Vrech, Etse, Meske, Caggiano y otros (2010). Se considera en una primera etapa el efecto de la tracción uniaxial de las fibras de acero que comienzan a trabajar una vez que el hormigón alcanza la resistencia pico. A partir de allí se incorpora la teoría de mezcla y el trabajo de la fibra a tracción en la masa del material.

El análisis numérico se centra en el comportamiento de falla del hormigón adiconado con fibras, con especial énfasis en la resistencia a la fractura, resistencia post-pico y la respuesta mecánica relacionada con la formulación de microplanos.

El ensayo de tracción se desarrolla en las condiciones descriptas precedentemente con probetas de 7 cm x 7 cm. Se considera una primera mezcla con el 98% de fibra de acero con una longitud de 3 cm que se considera es la longitud característica de Cosserat del modelo.

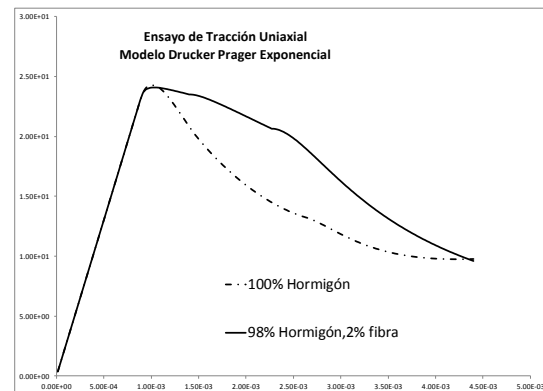


Figura 9. Ensayo de tracción simple.

Esta longitud característica, nula al comienzo del ensayo, se considera a partir de que se inicia la fluencia del hormigón, momento en el cual se inicia el aporte de resistencia a tracción de las fibras.

Se puede observar los resultados del ensayo graficados en la Fig. 9, en la cual se presentan las curvas del comportamiento de los dos materiales: el hormigón convencional y el hormigón con un 2% de fibras de acero adicionado.

7 CONCLUSIONES

De los ensayos llevados a cabo en este trabajo se puede decir que el modelo de microplanos micropolar presenta la capacidad de reproducir el cambio del comportamiento del material hormigón con la adición de fibras de acero. Se puede observar que superada la resistencia pico del material, se produce una mejora de las resistencias alcanzadas disminuyendo la abrupta caída de la resistencia, típica del ablandamiento de este material en tracción. En futuros desarrollos se pretende incorporar el "dowel effect" al modelo y comparar los resultados alcanzados con diferentes porcentajes de fibras adicionadas con los resultados de ensayos experimentales llevados a cabo por otros autores, en particular en ensayos de corte que es donde los grados de libertad adicionales de los continuos de Cosserat se activan, mejorando la capacidad de respuesta.

8 REFERENCIAS

Bazant, Z.P. and Oh, B.H. (1986), Efficient numerical integration on the surface of a sphere, *ZAMM* Vol. 66 (1) Pag.. 37 – 49.

Bazant, Z.P. and Oh, B.H. (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock, *J. Eng. Mech.* Vol. 111 Pag.. 559 – 582.

Bazant, Z.P. and Gambarova, P.G. (1984). "Crack shear in concrete: Crack band microplane model." *J. Struct. Eng.*, ASCE, Vol. 110. Pag.. 2015 - 2036.

Bazant, Z.P. (1976). Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. ASCE, *J. Eng. Mech. Div.*, Vol. 102. Pag. 331 - 344.

Carol,I., Bazant, Z.P., Prat, P. (1991) Geometric damage tensor based on microplane model, *J. Eng. Mech.* Vol. 117. Pag.. 2429 – 2448.

Carol,I., Bazant, Z.P., Prat, P. (1992) New explicit microplane model for concrete: theoretical aspects and numerical

implementation, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 29. Pag.. 1173 – 1191.

Carol, I., Jirasek, M., Bazant, Z.P. (2001) A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part I: free energy and consistent microplane stresses, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 38. Pag.. 2921 – 2931.

Kulh, E., Steinmann, P., Carol, I. (2001). A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part II: Dissipation and inelastic constitutive modeling, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 38. Pag. 2933 – 2952.

Kulh, E. Ramm, E.. (1998) On the linearization of the microplane model. *Mech. Cohes.-Fric. Mater.* Vol. 3. Pag. 343 - 364.

Kulh, E. Ramm, E. Willam, K. (2000) Failure analysis of elasto-plastic material models on different levels of observation, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 37. Pag. 7259 – 7280.

Kulh, E, Steinmann, P., Carol, I. (2001). A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part II: Dissipation and inelastic constitutive modeling,

Nieto, M.M. (2010). Modelo de falla para hormigones en continuos micropolares. Tesis doctoral.

Taylor,G.I. (1938) Plastic strain in metals, *J. Inst. Metals*, Vol. 62 . Pag. 307 - 324.

Vrech S, Etse G, Meschke G, Caggiano A, Martinelli E. Meso- and macroscopic models for fiber-reinforced concrete. In: Bicanic N, de Borst R,Mang H,Meschke G, editors. *Computational modelling of concrete structures*. Austria: Rohrmoos Schladming; 2010. p. 241–50