

# Moción Ondulatoria de la Propagación en Fibras Ópticas

Foresi Pedro D.<sup>1</sup>, Contreras Juan J.<sup>1</sup>, Cano Jesús E.<sup>1</sup> & Beltramini Paola<sup>1</sup>

(1) *Departamento de Electrónica, Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas, Universidad Nacional de Catamarca.*

*pdforesi7@yahoo.com.ar, cjuanjose@hotmail.com, jesuseduardocano@gmail.com & palobeltra@yahoo.com.ar*

**RESUMEN:** Una forma de estudiar el comportamiento de la propagación de un rayo de luz en una fibra óptica es mediante la óptica geométrica, la cual no aporta información respecto a la potencia de la señal, configuración, distribución, intensidad y fase de la señal electromagnética, tal es el caso de la propagación en fibras monomodo. E aquí la conveniencia de la aplicación del análisis electromagnético para el estudio de las mismas. Como la luz que se propaga en el interior de las fibras ópticas transportando la información de las señales que se inyectan tienen un comportamiento ondulatorio, al ser funciones que dependen de dos variables: espacial y temporal, el análisis electromagnético partiendo de las ecuaciones de Maxwell y la aplicación del cálculo superior nos permiten conocer y estudiar la configuración y magnitud de los campos electromagnéticos en el interior de las fibras, con la obtención de la ecuación de dispersión o ecuación característica de éstas.

## 1 INTRODUCCIÓN

### 1.1 *Análisis de la propagación en Fibras Ópticas*

Una forma de estudiar el comportamiento de la propagación de un rayo de luz en una fibra óptica es mediante la óptica geométrica, la cual no aporta información respecto a la potencia de la señal, intensidades de campo eléctrico y fase de la señal electromagnética, tal es el caso de la propagación de señal en fibras monomodo. En tal caso es necesario el análisis electromagnético. En este mismo sentido, en la propagación en fibras multimodo, no todos los rayos que forman con la normal a la interface de separación entre el núcleo y la cubierta un ángulo superior al crítico se propagan como guiados, sino que sólo un conjunto discreto de ángulos del continuo lo hace. En este caso también es necesario el análisis electromagnético.

La fibra óptica es una guía de onda dieléctrica de geometría cilíndrica, las soluciones para el campo eléctrico y magnético se denominan modos híbridos donde ninguna de sus tres componentes vectoriales es nula, a diferencia de lo que ocurre en guía de ondas metálicas, donde las soluciones para los campos electromagnéticos son primordialmente modos transversales eléctricos, magnéticos o transversales electro magnéticos. En la práctica afortunadamente el núcleo y la cubierta de la fibra poseen índices de refracción muy similares, ello posibilita emplear la aproximación de guiado débil que nos permite simplificar notablemente los resultados llevando el mismo a soluciones donde tan sólo una de las componentes del campo eléctrico y del campo

magnético son no nulas, las soluciones son entonces ondas planas linealmente polarizadas.

Para encontrar la forma total del campo electromagnético en fibras reales es necesario considerar la teoría de acoplo de modos, para estudiar el intercambio de energía que se realiza entre modos de propagación, dado que los modos propagados no son independientes entre sí.

### 1.2 *Teorías que sigue este trabajo*

Si bien la luz tiene un comportamiento dual: corpuscular y ondulatorio, éste último permite su estudio y análisis mediante la aplicación de las teorías de campos y de herramientas matemáticas de cálculo y resolución de ecuaciones diferenciales específicas.

## 2 TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA PARA GUIAONDAS DIELECTRICAS

La ecuación de HELMHOLTZ viene dada por:

$$(\nabla^2 + K^2)\theta = 0 \quad (1)$$

Donde  $\nabla^2$  es el laplaciano,  $k$  es un número real positivo y  $\theta$  es un campo escalar. La ecuación aparece en varios contextos de la física donde  $k$  se interpreta como el número de onda.

La deducción de la ecuación desde el análisis electromagnético comienza a partir de las ecuaciones de Maxwell. Para medios no conductores libres de fuentes caracterizados por  $\epsilon$  y  $\mu$  ( $\sigma=0$ ) las ecuaciones de Maxwell se reducen a:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (5)$$

Estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales de primer grado para los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ . Podemos combinarlas para producir una ecuación de segundo grado conteniendo sólo uno de los campos, esto es:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{H})}{\partial t} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6)$$

Además sabemos que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad (7)$$

Resultando esto en:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad (8)$$

Así obtenemos:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (9)$$

Siendo que la velocidad de fase es:

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (10)$$

Lo que significa que:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (11)$$

Obtenemos así:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (12)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

Análogamente lo podemos plantear para el campo magnético resultando:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

Estas dos ecuaciones anteriores, 13 y 14, representan las ecuaciones de onda vectoriales homogéneas. Si a estas ecuaciones las descomponemos en coordenadas cartesianas podemos descomponerlo en tres ecuaciones de ondas escalares, homogéneas y unidimensionales. Cada componente del campo eléctrico y magnético debe satisfacer una ecuación cuya solución representa una onda. Si se supone que el campo tiene dependencia armónica con el tiempo de la forma:

$$\vec{\Psi} = \text{Re}(\vec{\Psi}_0 e^{-i\omega t}) \quad (15)$$

Donde  $\Psi$  puede ser tanto E como H, concluimos así:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_S + \frac{\omega^2}{v_p^2} \vec{E}_S = 0 \quad (16)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_S + k^2 \vec{E}_S = 0 \quad (17)$$

Análogamente encontramos la siguiente ecuación para el campo magnético:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H}_S + k^2 \vec{H}_S = 0 \quad (18)$$

Concluimos así para el campo eléctrico en la ecuación de Helmholtz:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_S + k^2 \vec{E}_S = 0 \quad (19)$$

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2) \vec{E}_S = 0 \quad (20)$$

Del mismo modo se puede plantear para el campo magnético. Siendo el campo eléctrico y magnético campos escalares.

### 3 FIBRA DE SALTO DE ÍNDICE: ECUACIÓN DE DISPERSIÓN

Es necesario en este caso considerar una serie de simplificaciones para continuar, una de ellas es que tanto en el núcleo como en la cubierta el índice de refracción es constante con la coordenada radial. En segundo lugar el índice en la cubierta puede considerarse infinita a todos los efectos.

El operador laplaciano en coordenadas cilíndricas se puede expresar como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (21)$$

Podemos de este modo expresar la ecuación de Helmholtz para los campos eléctricos y magnéticos como:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \begin{bmatrix} E(r, \theta, z) \\ H(r, \theta, z) \end{bmatrix} + k^2 \begin{bmatrix} E(r, \theta, z) \\ H(r, \theta, z) \end{bmatrix} = 0 \quad (22)$$

Dado que cada campo posee tres componentes, siendo en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\hat{r} + E_\theta(r, \theta, z)\hat{\theta} + E_z(r, \theta, z)\hat{z} \quad (23)$$

La ecuación corresponde a un sistema de seis ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Para resolver este tipo de ecuaciones aplicaremos el método de separación de variables, donde la función solución propuesta obedece a la forma:

$$\begin{bmatrix} E(r, \theta, z) \\ H(r, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(r, \theta) \\ H(r, \theta) \end{bmatrix} e^{-j\beta z} \quad (24)$$

Para este caso se elige

$$f(z) = e^{-j\beta z} \quad (25)$$

A modo demostrativo resolveremos para el campo eléctrico, para el caso de la componente z, consideramos sólo una de las ecuaciones, esto es:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] [E_z(r, \theta)] + k^2 [E_z(r, \theta)] = 0 \quad (26)$$

Donde:

$$[E_z(r, \theta)] = E(r, \theta) e^{-j\beta z} \quad (27)$$

A la ecuación podemos expresarla de otro modo cómo:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] [E_z(r, \theta)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [E_z(r, \theta)] + k^2 [E_z(r, \theta)] = 0 \quad (28)$$

Siendo:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} [E_z(r, \theta)] = \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(r, \theta) e^{-j\beta z} = (-\beta^2) E(r, \theta) \quad (29)$$

Quedando la expresión cómo:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] [E_z(r, \theta)] + (-\beta^2) E_z(r, \theta) + k^2 [E_z(r, \theta)] = 0 \quad (30)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] [E_z(r, \theta)] + (k^2 - \beta^2) E_z(r, \theta) = 0 \quad (31)$$

Proponemos otra nueva separación de variables:

$$[E_z(r, \theta)] = \varphi(r) e^{\pm j l \theta} \quad (32)$$

siendo  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

En este caso la  $f(\theta)$  propuesta tiene que verificar que:

$$f(\theta + k2\pi) = f(\theta), k = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Si:

$$f(\theta) = e^{j l \theta} \quad (34)$$

La condición anterior sólo puede verificarse si  $l$  es entero.

La última ecuación queda de la siguiente manera:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \varphi(r) e^{\pm j l \theta} + (k^2 - \beta^2) \varphi(r) e^{\pm j l \theta} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} + \left( k^2 - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) \varphi(r) = 0 \quad (36)$$

Esta última ecuación es una ecuación diferencial de Bessel. Las soluciones son funciones de Bessel de orden  $l$ , y dependen en general del término:  $k^2 - \beta^2$ .

Si este término es mayor que cero, entonces la función solución es:

$$\varphi(r) = C_1 J_l(hr) + C_2 Y_l(hr) \quad (37)$$

Donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes;  $J_l(x)$  y  $Y_l(x)$  las funciones de Bessel de primera y segunda especie respectivamente, y  $h = \sqrt{k^2 - \beta^2}$ .

Si por el contrario el término  $(k^2 - \beta^2)$  es menor que cero, entonces la función solución es:

$$\varphi(r) = C_3 I_1(qr) + C_4 K_1(qr) \quad (38)$$

donde  $C_3$  y  $C_4$  son constantes;  $I_1$  e  $K_1$  son las funciones modificadas de Bessel de primera y segunda especie respectivamente, y  $q = \sqrt{\beta^2 - k^2}$ .

Las expresiones 37 y 38 representan las posibles variaciones radiales del campo electromagnético en un dieléctrico al emplear coordenadas cilíndricas.

Ambas ecuaciones dependen del orden  $L$  de la variación acimutal, siendo este un número entero, por lo tanto la solución a la ecuación de Helmholtz no es única, sino que existen infinitas soluciones, cada una de ellas da un patrón de campo eléctrico transversal al eje  $z$  de propagación, que viene caracterizado por un patrón acimutal y radial diferente. Cada una de éstas soluciones se denomina MODO y pueden ser de varios tipos. En comunicaciones son de particular interés los modos guiados que se caracterizan por tener su energía confinada en el núcleo de la fibra, siendo la energía transportada en la cubierta una función fuertemente decreciente con la separación  $r$  respecto al eje del núcleo.

Cómo se mencionó anteriormente, las formas de las posibles soluciones viene dado por las ecuaciones 37 (funciones de Bessel de primera y segunda especie) y 38 (funciones modificadas de Bessel de primera y segunda especie)

Ambas son posibles tanto en la cubierta cómo en el núcleo, sin embargo sólo una de las posibles combinaciones dará lugar a modos guiados.

Si se desea que la señal propagada este confinada en el núcleo: los campos deben ser fuertemente decrecientes en la cubierta. La única función de Bessel que presenta dicho comportamiento al aumentar su argumento es la función  $K_1(x)$ .

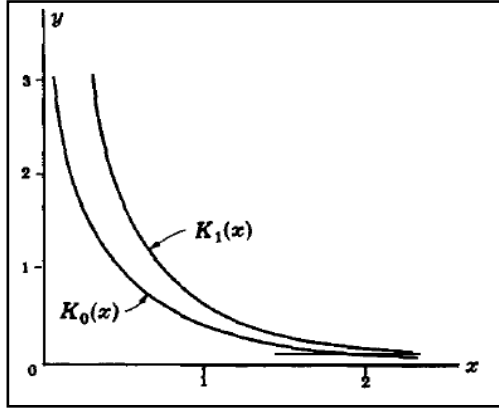


Figura 1. Funciones de Bessel

Por lo que en la cubierta la función solución es la ecuación 38. Esto implica que en la cubierta:

$$\beta \geq n_2 k_0 = \frac{n_2 w}{c} \quad (39)$$

En este caso  $C_3$  necesariamente tiene que valer cero dado que  $I_1(x)$  es una función creciente con el argumento.

Así en la cubierta la solución para la componente Z de los campos electromagnéticos es:

$$E_z(\vec{r}, t) = C k_l(qr) e^{j l \theta} e^{j(wt - \beta z)} \quad (40)$$

$$H_z(\vec{r}, t) = D k_l(qr) e^{j l \theta} e^{j(wt - \beta z)} \quad (41)$$

Dónde C y D son constantes arbitrarias y el parámetro q viene dado por:

$$q = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{n_2 w}{c}\right)^2} \quad (42)$$

Para los campos que se propagan en el núcleo: debemos considerar su comportamiento en las inmediaciones de su eje, esto es cuando  $r \rightarrow 0$ , la única función que se adecua en su comportamiento es  $J_1(x)$ .

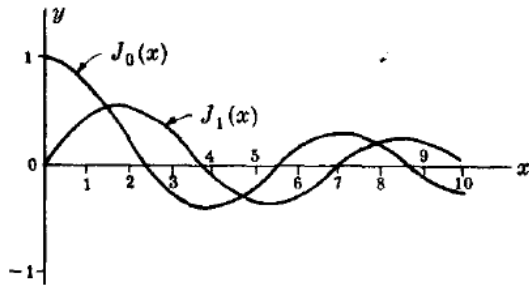


Figura 2. Funciones de Bessel

Por lo que en el núcleo la función solución propuesta es la ecuación 37. En este caso  $C_2 = 0$  ya que  $Y_1(x) \rightarrow \infty$  si  $x \rightarrow 0$ . En el núcleo  $\beta \leq n_1 k_0 = \frac{n_1 w}{c}$ .

Así en el núcleo los campos electromagnéticos según el eje z vienen dados por:

$$E_z(\vec{r}, t) = A J_l(hr) e^{j l \theta} e^{j(wt - \beta z)} \quad (43)$$

$$H_z(\vec{r}, t) = B J_l(hr) e^{j l \theta} e^{j(wt - \beta z)} \quad (44)$$

Donde:

$$h = \sqrt{\left(\frac{n_1 w}{c}\right)^2 - \beta^2} \quad (45)$$

Considerando lo anterior encontramos que la condición que debe cumplir la constante de propagación para que un modo sea guiado es:

$$n_2 k_0 = \frac{n_2 w}{c} \leq \beta \leq n_1 k_0 = \frac{n_1 w}{c} \quad (46)$$

Lo que nos queda es aplicar las condiciones de contorno del campo electromagnético para determinar el valor de las constantes que aparecen en las soluciones de las ecuaciones, para la cubierta las constantes C y D, para el núcleo las constantes A y B. Para el caso de la fibra óptica las condiciones de contorno se fijan sobre la superficie de separación entre el núcleo y la cubierta. Al no existir cargas y corrientes, las condiciones de contorno del campo electromagnético se transforman en condiciones de continuidad de los campos tangenciales  $E_z$ ,  $E_\theta$ ,  $H_z$  y  $H_\theta$  en la superficie de separación.

Las condiciones de contorno se transforman en el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$A J_l(ha) = C k_l(qa) \quad (47)$$

$$B J_l(ha) = D k_l(qa) \quad (48)$$

El primer miembro de la ecuación 47 es  $E_z$  en el núcleo y el segundo el  $E_z$  en la cubierta. Asimismo, el primer miembro de la ecuación 48 es  $H_z$  en el núcleo y el segundo el  $H_z$  en la cubierta.

Nos resta encontrar las componentes  $r$  y  $\theta$  de los campos eléctricos y magnéticos, así podremos plantear las dos ecuaciones faltantes en las condiciones de contorno que se deben cumplir. Para encontrarlas recurrimos a las expresiones encontradas para los campos eléctricos y magnéticos en el eje z y a las relaciones de la teoría electromagnética, resultando:

$$E_r = -\frac{j\beta}{w^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon - \beta^2} \left[ \frac{dE_z}{dr} + \frac{w \mu_0}{\beta} \frac{1}{r} \frac{dH_z}{d\theta} \right] \quad (49)$$

$$E_\theta = -\frac{j\beta}{w^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon - \beta^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{dE_z}{d\theta} - \frac{w \mu_0}{\beta} \frac{dH_z}{dr} \right] \quad (50)$$

$$H_r = -\frac{j\beta}{w^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon - \beta^2} \left[ \frac{dH_z}{dr} - \frac{w \epsilon_0 \epsilon}{\beta} \frac{1}{r} \frac{dE_z}{d\theta} \right] \quad (51)$$

$$H_\theta = -\frac{j\beta}{w^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon - \beta^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{dH_z}{d\theta} + \frac{w \epsilon_0 \epsilon}{\beta} \frac{dE_z}{dr} \right] \quad (52)$$

Así concluimos en el siguiente sistema de ecuaciones para las condiciones de contorno:

Para la ecuación 47:

$$A \left[ \frac{j l}{h^2 a} j_l(ha) \right] + B \left[ -\frac{w \mu}{\beta h} j_l(ha) \right] + C \left[ \frac{j l}{q^2 a} k_l(qa) \right] + D \left[ -\frac{w \mu}{\beta q} k_l(qa) \right] = 0 \quad (53)$$

Para la la condiciones de la ecuación 48:

$$A \left[ \frac{w\varepsilon_1}{h\beta} j_l(ha) \right] + B \left[ \frac{j_l}{h^2 a} j_l(ha) \right] + C \left[ \frac{w\varepsilon_2}{q\beta} k_l(qa) \right] + D \left[ \frac{j_l}{q^2 a} k_l(qa) \right] = 0 \quad (54)$$

El sistema de ecuaciones es homogéneo, siendo sus incógnitas A,B,C y D. Para que su solución sea no trivial es necesario que el determinante de sus coeficientes sea nulo. Para ello debe verificarse la siguiente ecuación:

$$\left[ \frac{J_l(ha)}{h J_l(ha)} + \frac{K_l(qa)}{q K_l(qa)} \right] \left[ \frac{n_1^2 J_l(ha)}{h J_l(ha)} + \frac{n_2^2 K_l(qa)}{q K_l(qa)} \right] = \left( \frac{\beta}{k_0} \right)^2 \left[ \left( \frac{1}{qa} \right)^2 + \left( \frac{1}{ha} \right)^2 \right] \quad (55)$$

Ésta última ecuación se denomina ECUACIÓN DE DISPERSIÓN y su solución nos proporciona fijado un valor para L, los valores posibles de las constantes de propagación  $\beta$ . La solución para esta ecuación se obtiene en la mayoría de los casos por métodos numéricos, aunque con algunas consideraciones se podría llegar a un análisis gráfico.

#### 4 CONCLUSIONES

A partir de las expresiones matemáticas de las ecuaciones de Bessel y de su representación gráfica podemos interpretar porque estas ecuaciones expresan el comportamiento de los campos dentro de la fibra. Viendo la gráfica misma de las funciones de Bessel se nota claramente cuáles de ellas van a representar el comportamiento tanto en el núcleo como en la cubierta.

Es interesante además ver que las condiciones de continuidad en el borde de los medios, núcleo y cubierta, se pueden plantear a partir de que la fibra es un medio libre de cargas y de corrientes.

Otro punto importante de considerar es cómo a partir del análisis se van encontrando las condiciones que debe cumplir la constante de propagación para que exista la misma.

Finalmente se debe inferir que al hacer el análisis planteando la teoría electromagnética para el caso de un medio dieléctrico, sucede un adecuado desarrollo que parte desde la geometría cilíndrica de la fibra, para terminar analizando el comportamiento de las ecuaciones de Bessel. De este modo se puede mostrar el rigor matemático con el que se debe analizar el comportamiento del campo dentro de la fibra para obtener los posibles valores de la constante de propagación para que exista propagación dentro de la fibra. Esto mediante la solución de la ecuación de dispersión.

#### 5 REFERENCIAS

- Campany, J., F. J. Fraile-Peláez & J. Martí, *Fundamentos de Comunicaciones Ópticas*, Ed. Síntesis, España, 1998
- España Boquera, M. C., *Comunicaciones Ópticas.*, Editorial Diaz de Santos, Madrid, 2005.
- Ramaswami R. & Sivarajan K. N., *Optical Networks*, Editorial Morgan Kaufmann Publishers. Segunda Edición, Usa, 2002.