

Modelo matemático y simulación de un motor de ciclo Stirling empleando el software Simusol

Marcelo E. Watkins¹, Cecilia Marchetti², Carlos Kozameh³

(1) Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca.

<u>watkinsmarcelo@gmail.com</u>

(1) Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca. ceci-marchetti@hotmail.com

(3) Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba. <u>ckozameh@gmail.com</u>

RESUMEN: El desarrollo e investigación de motores Stirling han despertado la atención de muchos científicos institutos y empresas comerciales. El motor Stirling es tanto práctica como teóricamente un dispositivo fiable y seguro, reconocido dos siglos después de su invención por Robert Stirling en 1816. Funciona en un ciclo termodinámico regenerativo cerrado y reversible. El objetivo de este documento es proporcionar información y presentar una revisión para el desarrollo de la máquina Stirling, el ciclo del motor y una técnica de simulación utilizada para el análisis y optimización del mismo. El modelo matemático empleado es el modelo adiabático de cinco volúmenes. La simulación se desarrolla empleando el software SIMUSOL, de libre circulación. Se obtienen las curvas del ciclo Stirling y las de temperatura en diferentes puntos de interés y para diferentes presiones de trabajo. La precisión global de la simulación es satisfactoria.

1 INTRODUCCION

1.1 Antecedentes

El motor Stirling fue inventado en 1816 por el escocés Robert Stirling, unos 80 años antes de la invención del motor diésel. La máquina de Stirling es un dispositivo que opera en un ciclo termodinámico regenerativo cerrado, es decir sin escape de gases hacia el ambiente. La compresión y expansión del fluido se realiza a diferentes temperaturas. El flujo es controlado por cambios de volumen de los espacios en los que se aloja gas de manera que existe una conversión neta de calor en trabajo o viceversa. Lamentablemente, a comienzos del siglo XIX con el desarrollo de los motores de combustión interna y los motores eléctricos, el motor Stirling quedó en el olvido. Sin embargo actualmente está recuperando su lugar en los desarrollos tecnológicos más avanzados.

La alta eficiencia de los motores Stirling, su bajo nivel de ruido y su capacidad para trabajar con diferentes fuentes de calor permitirían satisfacer con eficiencia la demanda de energía actual con seguridad y calidad ambiental. Los motores Stirling de baja potencia son considerados hoy las máquinas más eficientes para aprovechamiento de la energía solar.

Con el fin de analizar y mejorar el desempeño de estos dispositivos, se están desarrollando en todo el mundo códigos de simulación de los tres subsistemas principales de estas unidades, es decir, el receptor solar, el ciclo termodinámico y los diferentes mecanismos de accionamiento y control (Thombarea y Vermab, 2008 ; Saravia *et al*, 2010 ; Strauss y Dobson, 2010).

En un intento de modelar un motor Stirling real, Urieli y Berchowitz (1984) modifican el motor ideal de tres espacios –compresión, regenerador y expansión– agregando dos espacios adicionales – calentador y enfriador– lo cual permite trabajar con un modelo adiabático de cinco volúmenes, cuyo desempeño es muy similar al del motor real. En un ciclo Stirling ideal los volúmenes de compresión y de expansión se mantienen a temperatura constante. Sin embargo es posible demostrar que esto no sucede en el motor real. Así, en máquinas reales, el espacio de trabajo tenderá a ser adiabático en lugar de isotérmico. Esto implica que la transferencia neta de calor durante el ciclo debe ser proporcionada por los intercambiadores de calor.

El modelo matemático que se plantea en el presente trabajo requiere de la resolución de ecuaciones diferenciales simultáneas. El software SIMUSOL (Saravia y Saravia, 2000) se constituye, por ello, en una herramienta muy útil al momento de simular el funcionamiento de la máquina.

2 DESARROLLO

2.1 Termodinámica del ciclo Stirling teórico

El ciclo termodinámico teórico de la máquina inventada por Stirling está representado en los diagramas PV y TS de la Fig. 1. El mismo consta de cuatro procesos; Una compresión isotérmica (1-2), seguida de un incremento de la presión a volumen constante (2-3). El siguiente proceso es una expansión isotérmica (3-4) cerrándose el ciclo con una disminución de la presión a volumen constante.



Figura 1. Ciclo Stirling teórico

Consideremos el modelo simplificado de la máquina de Stirling representado en la Fig. 2. El mismo consta de un cilindro con dos pistones opuestos y con el regenerador ubicado entre los pistones. El regenerador es un cuerpo poroso con

una alta capacidad para absorber y transferir calor. Podemos imaginarlo como una esponja metálica o un conjunto de pequeños cuerpos metálicos encapsulados que permiten el paso del fluido entre las cavidades sin pérdida de presión. El espacio comprendido entre el regenerador y el pistón de la izquierda (1) se denomina "volumen de compresión" mientras que el espacio entre el regenerador y el pistón de la derecha (2) se llama "volumen de expansión". El volumen de expansión se mantiene a la temperatura más alta, mientras que el volumen de compresión se mantiene a la temperatura inferior. El gradiente de temperatura se mantiene constante durante el proceso.

$$\Delta T = (T_{max} - T_{min}) \tag{1}$$

El ciclo Stirling descripto es un ciclo teórico dado que se presuponen procesos isotérmicos que implican una eficacia perfecta en la transferencia de calor entre el fluido alojado en los cilindros de expansión y compresión y las fuentes respectivas. Esto no es posible dado que por baja que sea, existe una resistencia térmica en las paredes de los cilindros. Por otro lado se presupone que el regenerador está totalmente aislado y no hay pérdidas de calor hacia el ambiente, lo cual no es totalmente cierto.



Figura 2. Modelo simplificado de la máquina de Stirling ideal.

2.2 El modelo adiabático

Con el fin de simular un motor que se aproxime más al motor real, empleamos un modelo de cinco volúmenes (Urieli y Berchowitz, 1984). De este modo tendremos cinco componentes conectados en serie, esto es, el volumen de compresión (V_c), el espacio del enfriador (V_k), el volumen del regenerador (V_r), el espacio del calentador (V_h) y el volumen de expansión (V_e) como se muestra en la Fig. 3. Asumimos que la masa de gas (M) total en la máquina es constante y se calcula mediante la fórmula (2).

$$M = m_c + m_k + m_r + m_h + m_e \tag{2}$$

Las máquinas de ciclo Stirling basadas en el modelo adiabático suponen transferencias de calor entre capas del espacio de trabajo del gas empleando coeficientes de transferencia de calor. Las variaciones de temperatura resultantes en los conducen de trabajo espacios а una discontinuidad de la temperatura en la interface. El modelo con espacios de compresión y expansión adiabáticas permite estudiar parámetros de diseño tales como las variaciones de temperatura, ángulo de fase barrido, relación de volúmenes y proporción de los espacios muertos.



Figura 3. Modelo adiabático de la máquina de Stirling

El motor se modela con cinco componentes entre los que destacamos los espacios del calentador (V_h) , del enfriador (V_k) y el espacio del comportamiento regenerador, (V_r) cuyo termodinámico será igual al del modelo isotérmico. Es decir, el gas en el enfriador y en el calentador se mantiene a temperaturas constantes, T_k y T_h respectivamente, mientras que en el regenerador la variación de temperatura es lineal. Los espacios de compresión y expansión se asumen ahora como adiabáticos y por ello las temperaturas T_c y T_e pueden variar a lo largo del ciclo en concordancia con la naturaleza adiabática de dichos espacios tal como se puede ver en la Fig. 4.



Figura 4. Variación de temperatura en el modelo adiabático.

2.3 Transferencia de calor en el modelo adiabático

La ecuación de la energía puesta en juego será:

$$DQ + C_p(T_i m_i - T_o m_o) = DW + C_v D(mT)$$
(3)

De acuerdo con la termodinámica clásica:

$$PV = mRT \tag{4}$$

En cada espacio se cumple:

$$m_c = \frac{P}{R} \cdot \frac{V_c}{T_c} \dots; \quad m_e = \frac{P}{R} \cdot \frac{V_e}{T_e}$$
(5)

Si reemplazamos en (2)

$$M = \frac{P}{R} \left(\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_e}{T_e} \right)$$
(6)

Despejamos la presión P de la (6)

$$P = M.R \left(\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_e}{T_e}\right)^{-1}$$
(7)

$$R = C_p - C_v \tag{8}$$

Aplicando logaritmos a la ecuación (4) y diferenciando obtenemos:

$$\frac{D_P}{P} + \frac{D_V}{V} = \frac{D_m}{m} + \frac{D_T}{T}$$
(9)

Diferenciando la expresión (2)

$$0 = Dm_c + Dm_k + Dm_r + Dm_h + Dm_e \qquad (10)$$

Para los intercambiadores de calor, en los que los respectivos volúmenes y temperaturas son constantes, la ecuación diferencial de la ecuación de estado se reduce a:

$$\frac{D_P}{P} = \frac{D_m}{m} \tag{11}$$

Aplicando la ecuación (11) a cada uno de los tres intercambiadores obtenemos:

$$0 = Dm_c + D_P \left(\frac{m_k}{p} + \frac{m_r}{p} + \frac{m_h}{p}\right) + Dm_e \quad (12)$$

Sustituyendo

$$0 = Dm_c + {\binom{D_P}{R}} {\binom{V_k}{T_k}} + {\frac{V_r}{T_r}} + {\frac{V_h}{T_h}} + Dm_e$$
(13)

Aplicando la ecuación de la energía (3) al espacio de compresión obtenemos:

$$DQ_c + C_p T_{ck} m_{ck} = DW_c + C_v D(m_c T_c)$$
(14)

Sin embargo, el espacio de compresión es adiabático, esto es

$$DQ_c = 0 \tag{15}$$

A partir de consideraciones de continuidad, tendremos que la acumulación de gas Dm_c en el espacio de compresión es igual al flujo de masa dado por m_{ck} y que el trabajo es:

$$DW_c = pDV_c \tag{16}$$

Entonces la ecuación (14) se reduce a:

$$C_p T_{ck} Dm_c = p DV_c + C_v D(m_c T_c)$$
⁽¹⁷⁾

Sustituyendo la ecuación de estado por considerar el fluido como gas ideal, tendremos en el espacio de compresión:

$$Dm_c = (pDV_c + V_cDp/\gamma)/(RT_{ck})$$
(18)

Al igual que en el espacio de expansión:

$$Dm_e = (pDV_e + V_e Dp/\gamma)/(RT_{he})$$
(19)

Sustituyendo en (13) y simplificando:

$$Dp = \frac{-\gamma p \left({\binom{DV_c}{T_{ck}}} + {\binom{DV_e}{T_{he}}} \right)}{{\binom{V_c}{T_{ck}}} + \gamma {\binom{V_k}{T_k}} + {\binom{V_r}{T_r}} + {\binom{V_h}{T_h}} + {\binom{V_e}{T_{he}}}}$$
(20)

Observamos que las ecuaciones (18) y (20) son dos ecuaciones diferenciales simultáneas en las variables p y m_c . Una vez que p y m_c son evaluados, el resto de las variables se pueden obtener por medio de la ecuación de balance de masa y la ecuación de estado. Las variaciones de volumen DV_c , DV_e , V_c y V_e están disponibles analíticamente y todos los demás parámetros de las ecuaciones (18) y (20) son constantes excluyendo T_{ck} y T_{he} . Las temperaturas de interfase T_{ck} y T_{he} varían con la dirección del flujo de masa del gas.

Con el fin de evaluar dicho flujo (y por lo tanto la dirección del flujo de masa) se considera la ecuación de continuidad, dada por:

$$Dm = m_i - m_o \tag{21}$$

Mientras que el trabajo neto hecho por el motor es la suma algebraica de los trabajos de expansión y compresión.

$$DW = pDV_c + pDV_e \tag{22}$$

Considerando la ecuación de la energía [30] y remplazando DW y mT y simplificando obtenemos una forma más práctica de las energías puestas en juego

$$DQ + C_p(T_im_i - T_om_o) = (DV \ p \ C_p + Dp \ V \ C_v)/R$$
(23)

En los espacios de intercambio de calor no se realiza trabajo, porque los volúmenes respectivos son constantes. Así, aplicando la ecuación anterior a los espacios de intercambio de calor individuales obtenemos

$$DQ_{k} = \frac{(Dp \, V_{k} \, C_{v})}{R} - C_{p} (T_{ck} m_{ck} - T_{kr} m_{kr}) \quad (24)$$

$$DQ_r = \frac{(Dp \, V_r \, C_v)}{R} - C_p (T_{kr} m_{kr} - T_{rh} m_{rh}) \quad (25)$$

$$DQ_{h} = \frac{(Dp \, V_{h} \, C_{v})}{R} - C_{p} (T_{rh} m_{rh} - T_{he} m_{he}) \quad (26)$$

Nótese que mientras los intercambiadores de calor son isotérmicos y el regenerador es ideal, tendremos por definición que:

$$T_{kr} = T_k \tag{27}$$

$$T_{rh} = T_h \tag{28}$$

2.4 Configuración mecánica del motor

La Fig. 5 muestra un esquema simplificado del motor. Los pistones están desfasados 90° entre sí.

El cigüeñal tiene un solo brazo de radio R al cual se conectan las bielas de los dos pistones. Esto genera el desfasaje de 90 ° en el movimiento de los mismos. Las cámaras que definen los cilindros están conectadas a través de los intercambiadores al regenerador. El cigüeñal gira con velocidad angular ω . El ángulo que barre el cigüeñal se mide respecto de la vertical y es indicado con β en el dibujo, mientras que el ángulo que forma la biela del pistón de expansión con la vertical está identificado con la letra griega δ . Las distancias entre el centro de giro del cigüeñal y el pistón de compresión se mide con x mientras que la que separa al pistón de expansión del mismo punto se mide con la variable y.



Figura 5. Esquema de los cilindros

Vemos también que la longitud de las bielas está acotada como L en el gráfico.

Podemos afirmar que:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{L} = \frac{\operatorname{sen}\delta}{R} = \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{y}$$
(29)

$$y = L \cos \delta + R \cos \beta \tag{30}$$

Cuya derivada nos permite calcular la velocidad de desplazamiento del pistón

$$v_{y} = -\frac{dy}{dt} = L \, sen \, \delta \, \frac{d\delta}{dt} + R \, sen \, \beta \, \frac{d\beta}{dt} \tag{31}$$

Pero resulta que

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} \tag{32}$$

$$v_y = -\frac{dy}{dt} = L. \operatorname{sen} \delta \, \frac{d\delta}{dt} + R. \operatorname{sen} \beta. \omega$$
 (33)

Empleando las relaciones (29) se puede llegar a

$$v_y = \omega. \, y. \, tang \, \delta \tag{34}$$

Si llamamos F_y (Fig. 6) a la fuerza que el pistón de expansión hace sobre el cigüeñal, y F'_y a la componente tangencial de la fuerza sobre el mismo, podemos calcular el momento que dicha fuerza hace sobre el eje del motor:

$$M_{\nu} = F'_{\nu} \cdot R \tag{35}$$

$$F'_{y} = F_{y} \cdot \cos(\beta - 90) \tag{36}$$

$$M_y = R.F_y.\cos(\beta - 90) \tag{37}$$

Empleando nuevamente las relaciones (29) se obtiene:

$$M_{\rm v} = F_{\rm v}.\,y.\,tang\,\delta\tag{37}$$



Figura 6. Esquema de fuerzas

Si ahora llamamos

$$K_{y} = y. tang(\delta) \tag{38}$$

Podemos expresar las ecuaciones (34) y (38) de la siguiente manera:

$$v_y = \omega. K_y \tag{39}$$

$$M_{\nu} = F_{\nu} K_{\nu} \tag{40}$$

Luego, siguiendo el mismo procedimiento para el pistón de compresión se obtiene:

$$v_x = \omega. K_x \tag{41}$$

$$M_{\chi} = F_{\chi}.K_{\chi} \tag{42}$$

Los dos pares de ecuaciones muestran una manera sencilla de convertir velocidad angular en velocidad lineal y fuerza en momento angular.

2.5 Simulación

La Figura 7 muestra los primeros dos cuadros de la simulación con Simusol. En el cuadro "Parámetros" definimos el ángulo β mediante el parámetro Pbeta, a partir de su derivada definida en DPbeta. Esta a su vez depende de la condición inicial de carga del condensador VCmi, cuyo valor se define en un cuadro "Iniciales" de la Figura 9.



Figura 7. Cuadro de datos y parámetros

Se definen también las funciones seno y coseno del ángulo β . El resto de los parámetros son datos estructurales del motor y algunas constantes termodinámicas tales como la constante de Richter (Pri) y calores específicos del gas (Pcp, Pcv). Por otro lado en el cuadro de datos de la Figura 7 se cargan las ecuaciones (39), (40), para el pistón de expansión y (41), (42) para el de compresión. Se calcula también la fuerza que la presión del gas ejerce sobre cada uno de los pistones mediante las expresiones Jfe y Jfc.

La Figura 8 muestra el diagrama del circuito análogo eléctrico del motor, generado empleando el software. El nodo w representa la velocidad angular del eje del motor. Vemos en la parte superior del diagrama las dos fuentes de corriente Jmfc y Jmfe que representan los momentos que impulsan la rotación del motor. Sobre el mismo nodo se encuentran conectados los condensadores Cmi, Cipc y Cipe, quienes simbolizan los momentos de inercia o masas inerciales del eje del motor y de los dos pistones con sus bielas. Por último sobre el mismo nodo se conecta una resistencia a masa (Rfre) quien tiene la función de simular la carga o freno del motor.



Figura 8. Diagrama para la simulación.



Figura 9. Condiciones iniciales y datos

En la Figura 10 podemos observar los cálculos realizados para determinar los desplazamientos x e y (Px; Py) de ambos pistones y sus derivadas o velocidades (Pdx; Pdy). Dichos cálculos se obtienen aplicando las ecuaciónes (29) y (30) teniendo presente que Pbc es la longitud de la biela del pistón de compresión denominada L y que Pra es el radio del cigüeñal designado con R. Psedec será entonces el seno del ángulo δ mientras que Pcodec es el coseno del mismo ángulo. Se repite el mismo esquema de cálculo para el pistón de expansión. Se calculan en este cuadro los coeficientes PKx PKy y correspondientes a Kx y Ky, ecuación (38).

Una vez que se calcularon los desplazamientos mecánicos de los pistones, podemos calcular los volúmenes. De acuerdo con el modelo adiabático los volúmenes V_k , V_h y V_r son de tamaño fijo y están definidos en el cuadro de la Figura 10 como PVk, PVh y PVr. Los otros dos volúmenes son variables y dependen de las distancias x e y. Se definen en el cuadro como PVc y PVe.

Calculamos también sus derivadas en el mismo cuadro con PdVc y PdVe.



Figura 10. Cálculo de los desplazamientos x e y

Parametros	
#Volumenes	
Px1=3*Pra+Pecil-Px	
Py1=3*Pra+Pecil-Py	
PVc=Parea*Px1	
PdVc=Parea*Pdx	
PVe=Parea*Py1	
PdVe=Parea*Pdy	
PVk=0.000232	
PVh=0.000276	
PVr=0.000232	
PVtot=PVk+PVh+PVr+PVc+PV	e

Figura 11. Definición de volúmenes fijos y variables

El siguiente cuadro de parámetros, Fig. 12, permite el cálculo de las temperaturas variables en los espacios de expansión y compresión, mientras que por definición se establecen las temperaturas fijas de los otros tres espacios del modelo. Para la presente simulación hemos adoptado $T_{min} = 20^{\circ}C$ y $T_{máx} = 650^{\circ}C$

Parametros
#Temperaturas PTci=20+273 PTei=650+273 PTki=20+273 PThi=650+273 PTri=550
PTk=PTki PTr=PTri PTh=PThi
PdTe=PTe*(Pdpr/Ppr+PdVe/PVe-Pdme/Pme) PdTc=PTc*(Pdpr/Ppr+PdVc/PVc-Pdmc/Pmc)
DPTe=PdTe DPTc=PdTc

Figura 12. Definición de temperaturas fijas y cálculo de las variables

La presión de trabajo del gas en el motor es la misma en los cinco espacios. Se calcula aplicando la ecuación definida en (7) y que en el cuadro

aparece como Ppr. La derivada de la presión se obtiene usando la ecuación (20) y definida en el cuadro de Simusol como Pdpr.

Las temperaturas de interface, dependen del sentido de desplazamiento del pistón en cada uno de los espacios. Para salvar esta complicación en el cálculo, se emplea la función "dsign" que asigna un valor +1 o -1 al parámetro definido en el cuadro como Psigck o Psighe, dependiendo del valor (positivo o negativo) de la derivada de la masa Pmck o Pmhe. De este modo la temperatura de interface PTck será igual a PTc si la masa de gas se desplaza desde el volumen c al k o será PTk si se desplaza desde K hacia c.

Parametros
#Presiones Ppr=Pmt*Pri/(PVc/Ptc+PVk/Ptk+PVr/Ptr+PVh/Pth+PVe/Pte) #Ppri=21310000
PA=PVc/PTc+PVe/PTe+Pgama*(PVk/PTk+PVr/PTr+PVh/PTh) PB=Pgama*Pri*(PdVc/Temp ck+PdVe/Temp he) Pdpr=PB/PA
#Temp interfase Psigck=dsign(1, Pmck) PTck=(1+Psigck)/2*PTc+(1-Psigck)/2*PTk Psighe=dsign(1, Pmhe) PThe=(1+Psighe)/2*PTh+(1-Psighe)/2*PTe

Figura 13. Cálculo de la presión y las temperaturas de interface.

Los demás cuadros que se agregan a la simulación son formales y definen el tiempo de la simulación y método de integración, entre otros.



Figura 14. Otros datos

2.6 Resultados

La Figura 15 muestra el gráfico del ciclo de Stirling que se obtiene mediante la simulación. La integral de la curva cerrada nos proporciona la energía por cada ciclo del motor, que es de unos 11,946 J por cada ciclo. Considerando además que en estado de régimen gira a una frecuencia de 50 Hz, la potencia mecánica disponible es de 597 w, suponiendo que no hay pérdidas por rozamiento.

Las temperaturas calculadas mediante la simulación pueden verse en el gráfico de la Figura 16. La máxima temperatura alcanzada en el cilindro de expansión es Te = 954 K, mientras

que el valor máximo para el cilindro de compresión es Tc = 323 K.



Figura 15. Ciclo Stirling resultado de la simulación.



Figura 16. Temperatura en el cilindro de compresión y en el cilindro de expansión.

2.7 Conclusiones

Se muestra el modelo matemático y el desarrollo de una técnica de simulación que permite obtener resultados rápidamente. Se desarrolla de este modo una herramienta de cálculo que podrá aplicarse posteriormente al ensayo de diferentes configuraciones que permitan optimizar el diseño de motores de ciclo Stirling.

2.8 Referencias

- Mancini, T., P. Heller, B. Butler Dish-Stirling Systems, An Overview of development and Status, *Journal of Solar Energy Engineering*, vol. 125, pp.135–151, 2003.
- Rallis C.J. A new constant volume external heat supply regenerative cycle. *Proceedings of the* 12th I.E.C.E.C. pp.1534–1537, 1977.
- Saravia L., D. Alía de Saravia y R. Echazú (2010) - Simulación numérica de un ciclo Stirling de tipo alfa con calentamiento solar.

AVERMA Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente - Vol. 14 pp. 3169–3176, 2010

- Saravia L. y D. Alía de Saravia, Simulación de sistemas solares térmicos con un programa de cálculo de circuitos eléctricos de libre disponibilidad. AVERMA Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente., Vol. 4, pp. 817 – 823, 2000
- Thombare D.G., S.K. Verma Technological development in the Stirling cycle engines *Renewable and Sustainable Energy Reviews* vol. 12, pp. 1–38, 2008.
- Urieli I, Berchowitz. D.M., Stirling cycle engine analysis. *Adam Hilger Ltd.* 1984