IX Jornadas de Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingeniería del NOA
Santiago del Estero, 3 y 4 de Octubre de 2013

Nuevo significado semántico de la Lógica Proposicional

José I. Gómez[1], Elsa del V. Ibarra[2] y Darío J. Lutfi[3]

(1)Facultad de Agronomía y Agroindustrias. UNSE.
jgomez@unse.edu.ar

(2)Facultad de Ciencias Forestales UNSE
egomez@unse.edu.ar

(3)Facultad de Agronomía y Agroindustrias. UNSE.
dlutfi@unse.edu.ar

RESUMEN

El lenguaje formal de la lógica proposicional (al igual que el que permitiría reescribir alguna teoría matemática), tendría como dos dimensiones: una sintáctica y otra semántica. La primera considera símbolos sin ningún significado, junto con sus reglas de formación, pero cuyo tratamiento proporciona-en el caso de la lógica- elementos para el estudio o análisis de los métodos correctos de razonamientos. La segunda dimensión o enfoque semántico tiene que ver con la interpretación de esos símbolos, con el significado que de ellos se tiene en mente. Este trabajo se enmarca en el segundo enfoque: no se utilizan tablas de valores de verdad y en su lugar se indican los valores de verdad de las proposiciones, en fila e indicando el número de veces que aparece cada valor de verdad, como *valencia* de elementos químicos.

Palabras clave: Lógica- Significado semántico- Lenguaje - Enseñanza

1. PRESENTACIÓN

En esta propuesta se desarrolla una idea diferente de la usual, en cuanto a las bases semánticas del Cálculo Proposicional. Nos referimos a un nuevo lenguaje de las proposiciones, en la que se deja de lado las tablas de valores de verdad para trabajar con las proposiciones en columna (o en fila, cuando se haya alcanzado un cierto grado de dominio) y operando con los valores de verdad, de un modo posicional junto con la idea de valencia de elementos químicos, para expresar sus valores de verdad.

Según Saussure, el lenguaje, en cada instante, “implica a la vez un sistema establecido y una evolución; en cada momento es una institución actual y un producto del pasado.” (Cf Saussure, p.36, 37) Esto es lo que puede ocurrir ahora con el uso de las tablas de valores de verdad y el lenguaje que proponemos ahora. Se puede dar el paso de un modo de operar con elementos de la Lógica Proposicional, cuyo uso data de cientos de años, apoyado en principio en un hábito colectivo o convención cultural (Ibid, p. 93), a un modo diferente, en el que subyace, en alguna medida, nociones provenientes de otras disciplinas como la química y la aritmética, (por las nociones de valencia y de modo posicional de escribir los valores de verdad, respectivamente).

En este sentido se tendría una evolución o renovación de modos de expresión lingüística de la Lógica Proposicional, específicamente en cambios de significación.

Desde el punto de vista de la enseñanza, se plantea el desafío que consiste no en dejar de lado modos tradicionales, sino en ampliar las posibilidades de pensamiento o de estudio de los objetos de conocimientos.

1.1.Nociones elementales de Lógica Proposicional

La Lógica Proposicional estudia los enunciados o proposiciones que intervienen en el lenguaje.

Fue Crisipo de Soli (c. 281-206 a. C) quien introdujo las conectivas de implicación, conjunción y disyunción exclusiva. También determinó el valor de verdad de las proposiciones compuestas- sobre las bases de estas conectivas- a partir del conocimiento del valor de verdad de las proposiciones componentes. (Cf Ojeda Aciego, M., p.8)

George Boole (1815-1864) empleó tres conectivos, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, siendo su interpretación la que consignamos a continuación, para dos proposiciones p y q:

$p \wedge q$ es verdadera si y sólo si ambas p y q son verdaderas.

$p \vee q$ es verdadera si y sólo si al menos una p o q es verdadera.

$\neg p$ es verdadera si y sólo si p no es verdadera.

Desde el punto de vista formal, Boole asociaba a estos conectivos, las funciones siguientes:

Tabla 1: Funciones de Boole

	$\neg$		$\wedge$	0	1		$\vee$	0	1
0	1		0	0	0		0	0	1
1	0		1	0	1		1	1	1

Según el lenguaje actual, en la columna se puede vislumbrar la proposición p y en fila la proposición q. Se observa que hay una concepción de una proposición como una función cuyo recorrido es un conjunto binario: 0 y 1; en relación a los valores de sus símbolos proposicionales. Según Ojeda Aciego, esto no es más que la idea que tenía Crisipo en términos modernos. (Ibid, p.9)

Actualmente, las tablas de valores de verdad de la conjunción y disyunción tienen las formas siguientes:

Tabla 2: Conjunción y disyunción

p	q	$p \wedge q$		p	q	$p \vee q$
V	V	V		V	V	V
V	F	F		V	F	V
F	V	F		F	V	V
F	F	F		F	F	F

La construcción de tablas para definir el valor de verdad de la proposición compuesta, requiere de espacio, tiempo, mayor uso de representaciones simbólicas y un mayor manejo del panorama que se presenta una vez construida la misma.

Se realiza un trabajo mental de "doble entrada", al considerar los valores de verdad de las filas y columnas de las proposiciones componentes de la tabla.

A partir de una tabla de verdad puede resultar un tanto engorrosa la manera de definir el resultado final de una proposición compuesta.

2. EL NUEVO ENFOQUE SEMÁNTICO DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

En este nuevo lenguaje los valores de verdad de las proposiciones se considerarán componente a componente, de izquierda a derecha, o bien en forma *posicional*, en el sentido que se escribe una proposición debajo de la otra y se aplica la operación indicada.

También exponemos la escritura de operaciones proposicionales en el sistema binariol, estableciendo una relación entre estas nociones.

Las proposiciones p y q son como dos moléculas que al combinarse lo hacen de la siguiente manera:

$p: VVFF = V_2F_2$, con V y F, *"valencia"* dos cada una, en ese orden.

$q: VFVF = 2(VF)$, con V y F, *"valencia"* uno cada una, en ese orden.

2.1.La negación

Dada la proposición $p: VF$ su negación es $\neg p: FV$

2.2.La conjunción

La conjunción de las proposiciones p y q es una proposición compuesta que se indica en la forma $p \wedge q$, que es verdadera sólo cuando las dos proposiciones son verdaderas; en otro caso es falsa.

$$p \wedge q: (VVFF) \wedge (VFVF) = VFFF = VF_3 \quad (1)$$

Otra manera de escribir o de operar puede ser en la forma *posicional*, en el sentido que se escribe una proposición debajo de la otra y se aplica la operación indicada.

$$\begin{array}{ll} & p: VVFF \\ \wedge & q: VFVF \\ \hline \end{array}$$

$$p \wedge q: VFFF = VF_3$$

Otra manera de anotar es:

$$\wedge (p, q): VF_3 \quad (2)$$

En nuestra interpretación molecular o química, la conjunción es una "molécula", llamémosla molécula conjunción; y los valores de verdad son consideradas en términos de valencias.

La molécula conjunción es $p \wedge q: VF_3$ con V valencia uno y F valencia tres.

Esta proposición compuesta se puede leer en la forma "molecular": la conjunción de p y q es VFtres.

2.3.La disyunción

La disyunción de las proposiciones p y q es una proposición compuesta que es falsa únicamente cuando ambas proposiciones son falsas; en otro caso es verdadera.

$$p \vee q: (VVFF) \vee (VFVF) = VVVF = V_3F \quad (3)$$

La molécula disyunción es verdadera, valencia tres, y es falsa, valencia uno, en ese orden, de izquierda a derecha. Una forma más sencilla de operar puede ser en la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} & p:VVFF \\ \vee & q:VFVF \\ \hline & p\vee q:VVVF=V_3F \end{array} \quad (4)$$

Otra forma de indicar la disyunción es la siguiente: $\vee(p,q):V_3F$

Se puede leer en la forma "molecular": la disyunción de p y q es VtresF.

2.4.La implicación

La implicación de las proposiciones p y q es una proposición compuesta que es falsa sólo cuando la primera proposición (p) es verdadera y la segunda (q) es falsa; es decir cuando se da: VF ; en otro caso es verdadera.

$$\begin{aligned} & p\Rightarrow q:(VVFF)\Rightarrow(VFVF)= \\ & =VFVV=VFV_2 \end{aligned} \quad (5)$$

En otra forma de escribir tenemos:

$$\begin{array}{ll} & p:VVFF \\ \Rightarrow & q:VFVF \\ \hline & p\Rightarrow q:VFFF=VFVV=VFV_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow(p,q):VFV_2 \quad (6)$$

La molécula implicación es verdadera valencia uno; es falsa valencia uno y es verdadera valencia dos, en ese orden de izquierda a derecha. Se puede leer en la forma "molecular": la implicación de p y q es VFVdos.

2.5.Bicondicional

La doble implicación o bicondicional de las proposiciones p y q es una proposición compuesta que es verdadera cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad; en otro caso es falsa.

$$\begin{aligned} & p\Leftrightarrow q:(VVFF)\Leftrightarrow(VFVF)=VFFV= \\ & =VF_2V \end{aligned} \quad (7)$$

La molécula bicondicional es verdadera, valencia uno; es falsa, valencia dos y es verdadera valencia uno, en ese orden de izquierda a derecha.

$$\begin{array}{ll} & p:VVFF \\ \Leftrightarrow & q:VFVF \\ \hline & p\Leftrightarrow q:VFFV=VFFV=VF_2V \end{array} \quad (8)$$

Se puede leer en la forma "molecular": el bicondicional de p y q es VFdosV.

La suma de valencias de verdadera y falsa, debe coincidir con el número de valencias de los valores de verdad de las proposiciones o partículas que forman la operación proposicinal o molécula.

Las operaciones proposicionales pueden considerarse desde el punto de vista funcional, como leyes de composición interna definida en P, siendo P el conjunto de todas las proposiciones.

A modo de ejemplo:

$$\begin{aligned} & \wedge:PxP\to P \\ & (p,q)\mapsto\wedge(p,q)=VF_3 \end{aligned}$$

3. RELACIÓN ENTRE OPERACIONES PROPOSICIONALES CON EL SISTEMA DE NUMERACIÓN BINARIA

Consideraremos los valores de verdad verdadero y falso, como 1 y 0, respectivamente, en el sistema binario, o como lo había concebido Boole. Así, las proposiciones compuestas toman la forma siguiente:

Tabla 4: Las funciones proposicionales y la numeración binaria.

Conjunción	$\wedge(p,q):VF_3=1000_2$
Disyunción	$\vee(p,q):V_3F=1110_2$
Implicación	$\Rightarrow(p,q):VFVV=1011_2$
Bicondicional	$\Leftrightarrow(p,q):VFFV=1010_2$

4. FÓRMULAS LÓGICAS

Una fórmula lógica es una proposición que resulta verdadera independientemente del valor de verdad de las proposiciones componentes.

En el nuevo lenguaje se puede escribir en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & a)\ (p\wedge q)\Leftrightarrow(q\wedge p):(VFFF)\Leftrightarrow(VFFF)= \\ & =VVVV=V_4 \end{aligned} \quad (9)$$

La fórmula es una tautología, es decir, da Verdadero valencia 4.

b) $((\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \wedge \neg q) : [(FVFV) \wedge$
$(FFVV)] \wedge [(VVFF) \wedge (FVFV) =$ (10)
$[FFFV] \wedge [FVFF] = FFFF = F_4$

La fórmula es una **contradicción,** es decir, Falso valencia 4.

c)
$(p \wedge q) \Rightarrow r : [(VVVVFFFF) \wedge (VVFFVVFF)] \Rightarrow$
$\Rightarrow (VFVFVFVF) == [VVFFFFFF] \Rightarrow$ (11)
$\Rightarrow (VFVFVFVF) = VFVVVVVV = VFV_6$

La fórmula es una **contingencia.**

5. UN BREVE RESUMEN DE OPERACIONES PROPOSICIONALES

Podemos hacer un resumen de las operaciones proposicionales y sus respectivos valores obtenidos según cada sistema empleado:

Tabla 4: Resumen

Proposición	Neg p	Conj	Dis	Imp	Bic
V, F	FV	VF_3	V_3F	VFV_2	VF_2V

5.1.Algunas propiedades utilizando estas equivalencias (trabajando con dos proposiciones)

Propiedad distributiva de la conjunción respecto de la disyunción.

Sin aplicar la propiedad tenemos:
$(p \vee q) \wedge p : V_3F \wedge V_2F_2 = V_2F_2 = p$ (12)

Aplicando la propiedad:
$(p \vee q) \wedge p : (p \wedge p) \vee (q \wedge p) = p \vee (q \wedge p) =$ (13)
$= V_2F_2 \vee VF_3 = V_2F_2 = p$

Luego, la propiedad es válida.

Ahora trabajamos con q, fuera de los paréntesis
$(p \vee q) \wedge q : V_3F \wedge VFVF = VFVF = q$ (14)

Se puede ver que la disyunción $p \vee q$ hace las veces de elemento neutro con respecto a la conjunción.

5.2.Propiedad distributiva de la disyunción respecto de la conjunción

Sin aplicar la propiedad tenemos:
$(p \wedge q) \vee p : VF_3 \vee V_2F_2 = V_2F_2 = p$ (15)

Aplicando la propiedad:
$(p \wedge q) \vee p : (p \vee p) \wedge (q \vee p) = p \wedge (q \vee p) =$ (16)
$V_2F_2 \wedge V_3F = V_2F_2 = p$

Luego la propiedad es válida.
Ahora trabajamos con q, fuera de los paréntesis, se llega al resultado siguiente:

$(p \wedge q) \vee q : VF_3 \vee VFVF = VFVF =$ (17)
$VFVF = q$

Se puede ver que la conjunción $p \wedge q$ hace las veces de elemento neutro con respecto a la disyunción.

5.3.Leyes de De Morgan

$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
$\neg(VF_3) : \neg(VVFF) \vee \neg(VFVF)$ (18)
$(FV_3) : (FFVV) \vee (FVFV) = FV_3 = \vee$

Se tiene que: $\neg \wedge = \vee$

$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$
$\neg(V_3F) : \neg(VVFF) \wedge \neg(VFVF)$ (19)
$(F_3V) : (FFVV) \wedge (FVFV) = F_3V = \wedge$

Se observa que: $\neg \vee = \wedge$

Estos resultados con respecto a las leyes de De Morgan, permiten afirmar que:
La negación de la operación conjunción es igual a la operación disyunción y la negación de la operación disyunción es igual a la operación conjunción.

5.4.Propiedad distributiva de la conjunción respecto de la disyunción,

Sin aplicar la propiedad tenemos:
$(p \vee q) \wedge r = [V_4F_4 \vee 2(V_2F_2)] \wedge 4VF = V_6F_2 \wedge$ (20)
$4VF = VFVFVFFF = 3(VF)F_2$

Aplicando la propiedad:

$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r) = [V_4F_4 \wedge 4(VF)] \vee$
$[2(V_2F_2) \wedge 4(VF)] = 2(VF)F_4 \vee VFFFVFFF$ (21)
$= 3(VF)FF = 3(VF)F_2$

A modo de ejemplo:

Evaluar la siguiente proposición compuesta, que es el silogismo hipotético:

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Solución:

$p : V_4F_4$
$q : 2V_2F_2$
$r : 4VF$

$p \Rightarrow q : V_2F_2V_4$
$q \Rightarrow r : VFV_3FV_2$
$p \Rightarrow r : 2(VF)V_4$

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) : VF_3VFV_2$
$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r) : V_8$

Da una tautología, como corresponde a este tipo de razonamiento.

6. CONCLUSIONES

En este artículo presentamos una manera original, novedosa y a la vez sencilla y dinámica de escribir y leer proposiciones y operar con las mismas, en la que no se emplean tablas de verdad.

Este nuevo enfoque semántico está vinculado con la interpretación de símbolos proposicionales y con el significado que de ellos se tiene en mente.

A nuestro parecer, la construcción de tablas requiere de mayor espacio, tiempo y uso de representaciones simbólicas que el que se emplea en la modalidad propuesta.

Por otra parte, creemos que el uso de las tablas de verdad, entraña el riesgo de enfocar la actividad matemática o de razonamiento más en la construcción de aquellas, que en evaluar los valores de verdad de las operaciones proposicionales propuestas.

El enfoque que presentamos propone un avance en el nivel de operaciones en cuanto a la economía en su escritura y lenguaje. Un ejemplo de ello son las Leyes de De Morgan, que desde el punto de vista de los valores de verdad, la negación de la conjunción deviene en la disyunción, y la negación de la disyunción, en la conjunción.

Otra ventaja la constituye la forma de operar con las proposiciones por cuanto se pasa de consignar los valores de verdad en varias filas (tablas de verdad) a operar en una sola línea.

Esta modalidad admite una forma de realizar las operaciones proposicionales de un modo similar a las operaciones aritméticas con números de varias cifras en cuanto a su disposición, puesto que permite escribir una proposición debajo de otra como en las mismas.

Este nuevo lenguaje también permite vincular las nociones del cálculo proposicional y el sistema binario.

La interpretación molecular tiende a considerar las operaciones proposicionales como moléculas y se agrega la noción de valencia, considerando los valores de verdad según la cantidad de veces que aparecen.

Desde el punto de vista de la didáctica, hay un avance en cuanto a proporcionar al docente y por ende al alumno una manera nueva y dinámica de operar con nociones del cálculo proposicional.

En este sentido se observa una evolución o renovación de los modos de expresión lingüística de la Lógica Proposicional, en particular, con respecto al significado semántico de sus elementos.

7. REFERENCIAS

Bosch, M. (1999). *La dimensión ostensiva de la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* Tesis doctoral. Barcelona. Servicio de Publicaciones. Universidad Autónoma de Barcelona.

Peirce, C.S. (1931-1958). *Collected Papers*, vols.1-8, C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds.), Cambridge, MA: Harvard University Press

Copi, Irving M. (1962). *Introducción a la Lógica*. Buenos Aires: Editorial Universitaria.

D’Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos *Uno*, 27, 51-76.

D’Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. 35, 90-106.

Eco, U. (2000). *Tratado de Semiótica General.* Milán: Lumen. Quinta Edición

Frege, G. (1998). *Sobre sentido y referencia*, En «Estudios sobre semántica» Ed. Orbis. Barcelona, 1984 (pp. 51-86).

Ferrater Mora, J. (1971). *Diccionario de Filosofía*. Editorial Sudamericana. 5º Edición.

Godino, J. (1996). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno, 25, 77-87.*

Godino J.D., (2010). Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. Universidad de Granada. Septiembre, (Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino J. D., Batanero, C. y Font, V (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada de The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The Internacional Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 27-135

Hjelmslev L. (1980). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid.: Gredos.

Moreira, M. A. (2010). ¿Por qué conceptos?, ¿Por qué aprendizaje significativo? ¿Por qué actividades colaborativas? ¿Por qué mapas conceptuales? *Revista Qurriculum*, 23, pp. 9-26

Rojo, A. (1978). *Álgebra I.* Editorial Eudeba. 6ta. Edición.

Saussure, F. (1945). *Curso de Lingüística General* Editorial Losada. Vigésima Edición.
Wittgenstein L. (1999). *Investigaciones filosóficas*, España. Editorial Altaza S.A.