IX Jornadas de Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingeniería del NOA
Santiago del Estero, 3 y 4 de Octubre de 2013

Análisis cualitativo sobre la solución de un problema de Cauchy asociado a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

Luis T. Villa Saravia [(1)] Nelson A. Acosta[(2)]

(1) *Universidad Nacional de Salta. Facultad de Ingeniería. INIQUI - UNSa – CONICET. Consejo Investigación CIUNSa. Av. Bolivia Nº 5.150. 4400 SALTA. ARGENTINA.*
e-mail: villal@unsa.edu.ar

(2) *Universidad Nacional de Salta Facultad de Ingeniería. Consejo Investigación CIUNSa.*

RESUMEN:
En el presente trabajo, en el contexto de lo que se entiende por análisis cualitativo en matemática aplicada, se considera un problema de Cauchy asociado a una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden a coeficiente variable no homogénea. Bajo oportunas hipótesis requeridas a cumplir por los datos iniciales, la función coeficiente y la solicitante, se obtiene un resultado sobre el comportamiento de la solución del citado problema. Se provee un ejemplo concreto a fin ilustrativo.

INTRODUCCION

1. Sea $u = u(t)$una función real de la variable independiente real t. Para tal función como incógnita se considera el siguiente Problema de Valor Inicial o de Cauchy asociado a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden a coeficiente variable no homogénea satisfecha por la misma:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + q(t)u = f(t), t > 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{du}{dt}(0) = u_1, u(0) = u_0 \tag{1.2}$$

Hipótesis

Sobre las funciones $q = q(t), f = f(t)$ en (1.1) se requieren cumplir las siguientes condiciones:
(H_0) $q = q(t), f = f(t)$ continuas, q acotada
(H_1) $q(t) < 0, f(t) < 0, \forall t \geq 0$. En tanto que, en (1.2) se requiere
(H_2)$u_1 > 0, u_0 = 0$
(H_3) $q(t)$ monótona creciente
(H_4) $f(t)$ monótona estrictamente decreciente.
Es conocido el hecho de la existencia de una profusa producción de resultados de naturaleza analítica y/o numérica reportados en la bibliografía corriente sobre un problema de valores iniciales (PVI) o de Cauchy asociado a una ecuación diferencial de segundo orden del tipo (1.1) o similar. No obstante, no abundan resultados de tipo cualitativo (a priori) sobre el comportamiento de la solución del PVI que nos ocupa.
Algunos resultados en la dirección de lo abordado en el presente trabajo fueron reportados por Villa y Acosta (2004), (2005), (2006), (2009). En los trabajos antes citados se reportaron algunos resultados sobre comportamiento de la solución y su dependencia con datos y parámetros, obtenidos vía análisis cualitativo sobre un PVI tipo (1.1) - (1.2).
En el presente artículo, usando conceptos y técnicas elementales del análisis matemático aplicables a las ecuaciones diferenciales ordinarias, se obtiene un resultado global sobre la solución de (1.1) – (1.2) bajo la hipótesis (H_0) a (H_4).

2. RESULTADOS PRELIMINARES

♦ Integrando (1.1) teniendo presente (1.2) se obtiene

$$\frac{du}{dt} = u_1 - \int_0^t q(\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)d\tau, \tag{2.1}$$

Introducimos ahora las funciones $s = s(t)$ y $P = P(t)$ definidas como:

$$s(t) = \int_0^t q(\tau)d\tau, P(t)exp\left(-\int_0^s s(\tau)d\tau\right) \tag{2.2}$$

Entonces, usando una oportuna integración por parte a partir de (2.1) se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal general de primer orden "formal" satisfecha por la función u de (1.1):

$$\frac{du}{dt} + s(t)u(t) = h(t), t > 0 \tag{2.3}$$

donde en (2.3), la función $h = h(t)$ viene dada como

$$h(t) = u_1 + \int_0^t f(\tau)d\tau + \int_0^t s(\tau)\frac{du}{d\tau}d\tau, t > 0 \tag{2.4}$$

▲ Ahora, apelando al conocido concepto de factor integrante, a partir de (2.3) se obtiene la siguiente representación para la solución u de (1.1) – (1.2):

$u(t) = P(t)\left\{u_1 \int_0^t \frac{d\tau}{P(\tau)} + \int_0^t \frac{g\tau}{P(\tau)} d\tau + \int_0^t \left[\frac{1}{P(\tau)}; \int_0^\tau s(z)\frac{du}{dz}dz\right] d\tau\right\} \quad t > 0$ (2.5)

donde la función $g = g(t)$ en (2.5) viene dada como

$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau, t > 0$ (2.6)

Es oportuno reescribir la expresión dada por (2.5) de la siguiente manera

$u(t) = P(t)[A(t) + B(t)], t > 0$ (2.7)

con $A(t)$ y $B(t)$ dadas como

$A(t) = \int_0^t \left[\frac{u_1 + g(\tau)}{P(\tau)}\right] d\tau, t > 0$ (2.8)

$B(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{P(\tau)} . \int_0^\tau s(z)\frac{du}{dz}dz\right] d\tau, t > 0$ (2.9)

Al ser la función $P = P(t)$ estrictamente positiva, el signo del segundo miembro de la expresión dada por (2.6)viene determinado por el signo de la suma $A(t) + B(t)$.

Observación 1.

En virtud de (H_1), a partir de (2.2) se sigue que

$s(t) < 0, \forall t \geq 0$ (2.10)

Observación 2.

En virtud de (H_2) y (H_0) a partir de (2.1) se infiere que existe $t_0 > 0$ tal que

$\frac{du}{dt} > 0, \forall t \in [0, t_0]$ (2.11)

$u(t) > 0, \forall t \in (0, t_0]$ (2.12)

▲ La solución de (1.1) – (1.2) no puede tener un mínimo positivo local en su dominio de existencia.

En efecto, si ello ocurriera, en vista de (H_2), antes de alcanzar tal mínimo debe pasar por un máximo local positivo denotando con t_0 y t_1 respectivamente a las abscisas del máximo y el mínimo ($t_1 > t_0$), se debe verificar:

$\frac{d^2u}{dt^2}(t_0) = f(t_0) - q(t_0)u(t_0) < 0$ (2.13)

$\frac{d^2u}{dt^2}(t_1) = f(t_1) - q(t_1)u(t_1) > 0$ (2.14)

es decir:

$f(t_0) < q(t_0)u(t_0),$ (2.15)

$f(t_1) > q(t_1)u(t_1),$ (2.16)

Nótese ahora que la desigualdad (2.16) es de imposible cumplimento a la vista de (H_3) y (H_4).

▲ La solución de (1.1) – (1.2) no puede tener un comportamiento asintótico tal que

$\lim_{t\to+\infty} u(t) \to_0^+$ (2.17)

o tal que

$\lim_{t\to+\infty} u(t) \to_0^-,$ (2.18)

En efecto si se diere (2.17) se tendría una situación según la cual el límite correspondiente con función derivada primera $\frac{du}{dt}$ creciente, es decir con $\frac{d^2u}{dt^2} > 0$, lo es contradictorio con el siguiente resultado que se sigue de (1.1):

$\lim_{t\to+\infty} \frac{d^2u}{dt^2} = \lim_{t\to+\infty}[f(t) - q(t)u(t)] = \lim_{t\to+\infty} f(t) < 0$

Si se diere (2.18), existiría $t_2 > 0$ tal que $u(t_2) < 0$ sería un mínimo local, donde se debería tener

$\frac{d^2u}{dt^2}(t_2) > 0,$ (2.19)

Por otra parte, a partir de (1.1) se sigue que

$\frac{d^2u}{dt^2}(t_2) = f(t_2) - q(t_2)u(t_2) < 0,$ (2.20)

lo que es contradictorio con (2.19).

▲ En vista del resultado local expresado por (2.17) es procedente analizar la siguiente alternativa sobre el comportamiento global de u solución de (1.1) – (1.2):

u es monótona creciente $\forall t > 0$ (2.21)

Vamos a ver que tal comportamiento no es posible.

En efecto (2.21) implica que la función $B = B(t)$ definida por (2.13) verifica que

$B(t) < 0, \forall t > 0,$ (2,22)

Por otra parte, en virtud del comportamiento de la función $g = g(t)$ emergente de (H_1) y (2.6), necesariamente a partir de un $T > 0$, la función $A(t)$ tomará valores negativos y en consecuencia naturalmente se tendrá

$A(t) + B(t) < 0, \forall t \geq T$ (2.23)

es decir, se tendría $u(t) < 0\ \forall \leq T$.

3. RESULTADO GLOBAL SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LA SOLUCIÓN u DE (1.1) – (1-2).

TEOREMA. Sea $u = u(t)$ solución de (1.1)-(1.2) con las hipótesis consignadas sobre $q = q(t), f = f(t)$ y con datos iniciales según (H_2).

Entonces las dos únicas eventuales alternativas de comportamiento para u son:

♦ $\exists_0 > 0$ tal que u es monótono estrictamente creciente en $(0, t_0)$ y monótona estrictamente decreciente para $t > t_0$.

♦♦ $\exists_1 > 0$ y $L > 0$ tal que u es monótona estrictamente creciente en $(0, t_1)$ y monótona decreciente para $t >, t_1$, con el comportamiento asintótico:

$\lim_{t\to+\infty} u(t) = L^+$

Prueba: Es una consecuencia que se infiere naturalmente de los resultados preliminares reportados en la sección precedente.

4. EJEMPLO ILUSTRATIVO PARA LA ALTERNATIVA ♦

Sea (1.1) – (1.2) con las siguientes funciones $q = q(t)$ y $f = f(t)$:

$q = t = e^{-t} - 2, f(t) = e^{-t^2} - 2, u_1 = 1$ (4.1)

El PVI se resolvió con tales datos usando un simulador no lineal. La curva obtenida grafica de la solución tiene el comportamiento previsto por la alternativa ♦ del Teorema.

REFERENCIAS

Acosta A. - Villa Saravia L.T.

Resultados sobre el comportamiento de la solución de un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial de segundo orden. Análisis cualitativo. LIV Reunión anual de comunicaciones científicas. XXVII Reunión de Educación Matemática UNION MATEMÁTICA ARGENTINA. Universidad Nacional del Comahue. Neuquen, 11 al 15 de octubre de 2004.

Acosta A. - Villa Saravia L.T.
Un Resultado a priori sobre el comportamiento de la solución de un problema a valores iniciales para una ecuación diferencial de segundo orden.
LV Reunión anual de Comunicaciones Científicas de la UNION MATEMÁTICA ARGENTINA.
Facultad de Cs Exactas de la Universidad Nacional de Salta. Salta, 19 - 23 Setiembre de 2005

Acosta A. - Villa Saravia L.T.
"Un resultado local de dependencia paramétrica de la solución de un problema de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden" , XIIIEMCI Nacional – V EMCI Internacional. Educación Matemática en Carreras de ingeniería 10-13 Octubre de 2006. Oberá Misiones

Acosta A. Villa Saravia L.T.
Resultados cualitativos sobre el comportamiento dinámico de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en el XV Encuentro Nacional y VII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Septiembre 16, 17 y 18 de 2009. Facultad Regional Tucumán de la Universidad Tecnológica Nacional.