Para que integramos? La utilización de la integral definida en la enseñanza de física en carreras tecnológicas

Liliana del Valle Medina[1] & Carlos G. Herrera[2]

(1) Departamento de Formación Básica, Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas, Universidad Nacional de Catamarca.
lilianajalile@hotmail.com

(2) Departamento de Formación Básica, Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas, Universidad Nacional de Catamarca.
cgherrera@tecno.unca.edu.ar

RESUMEN: El proyecto de investigación “La Matemática como disciplina transversal en la formación de Licenciados en Geología” tiene por objetivo el análisis de los requerimientos de contenidos conceptuales y procedimientos matemáticos necesarios para las asignaturas del ciclo superior de la carrera. En el marco de este proyecto se presenta una experiencia de articulación de contenidos de Matemática y Física cuyo objetivo es fortalecer la comprensión del concepto puramente matemático de la integral definida a través de sus aplicaciones a la modelización de un fenómeno físico; al mismo tiempo se espera que los alumnos descubran estrategias de resolución de problemas a partir de la identificación de los modelos matemáticos aplicables a situaciones físicas. Entre las actividades de la experiencia se ha seleccionado un ejemplo de aplicación de la integral definida a un problema del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado donde los alumnos desarrollan habilidades para establecer correspondencia entre el concepto matemático y el fenómeno físico, como así también de interpretación de ecuaciones a través del análisis dimensional y la de graficar.

1 INTRODUCCIÓN

El proyecto de investigación “La Matemática como disciplina transversal en la formación de Licenciados en Geología” se plantea como objetivo el análisis de los requerimientos de contenidos conceptuales y procedimientos matemáticos necesarios para las asignaturas del ciclo superior de dicha carrera y de las que son comunes con Ingeniería de Minas.
En el dictado del curso de nivelación, (Herrera, 2011), (Verón et al, 2012) se observaron algunas dificultades en la interpretación de conceptos matemáticos como así también en la aplicación de conceptos matemáticos a situaciones problemáticas sencillas de otras ciencias (Herrera et al, 2013). En función de ello y atendiendo a los estándares de acreditación establecidos para las carreras de Geología se plantearon una serie de actividades tendientes a subsanar estas deficiencias como por ejemplo la utilización de software libre para la correcta identificación de un objeto matemático o la interpretación de un fenómeno físico utilizando correctamente el modelo matemático correspondiente (Medina et al, 2011), como así también actividades de articulación con asignaturas correspondientes al área de las Geologías Básicas como ser Geofísica. (Herrera et al, 2012).
Continuando con la línea de trabajo de articulación de conceptos matemáticos con conceptos de otras ciencias, se diseña una actividad extracurricular, específicamente un Taller, en el que -a partir de los conceptos del cálculo integral- el alumno fortalezca su comprensión del concepto puramente matemático de la integral definida a través de sus aplicaciones a la interpretación de un fenómeno físico. Al mismo tiempo se espera que descubran estrategias de resolución de problemas a partir de la identificación de los modelos matemáticos aplicables a situaciones físicas.

2 FUNDAMENTACIÓN

Como resultado de esta investigación se aspira a identificar los modelos matemáticos fundamentales básicos que permiten describir los problemas propios de la Geología mediante el lenguaje de la matemática; con esto se logrará la fundamentación de la disciplina, su objeto de estudio y los objetivos, correspondientes al diseño curricular; también se logrará que los alumnos

comprendan la relevancia de los estudios matemáticos para su formación profesional.
Howard Gardner (ARAYA, 2000) destaca que “el problema en el aprendizaje de la matemática es la fragilidad que muestran los estudiantes de su entendimiento de los conceptos matemáticos y considera que esta fragilidad se debe a una enseñanza de la matemática que promueve la práctica de “una aplicación rígida de algoritmos”: los estudiantes fijan la atención en consideraciones sintácticas y no en un verdadero entendimiento”.
Muchos estudiantes nunca comprenden bien qué están haciendo cuando manipulan los símbolos y conceptos matemáticos, y por lo tanto perciben a la matemática como un conjunto de ejercicios simbólicos que no les servirán para nada en su vida personal o profesional.
La modelación matemática es uno de los temas que aparecen en el currículo oculto de las carreras universitarias, ya que se supone que el egresado debe “saber modelar”, pero en ningún caso se dice cómo incorporar la modelación matemática en la formación matemática ni en la disciplinar específica (Camarena, 2009).
“Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. Ésto implica que, cuando la matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella; en segundo término para que un alumno experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y la matemática en juego, como dos objetos separados pero al mismo tiempo interrelacionados.” (Blomhoj, 2008).
Desde el punto de vista del nivel práctico del currículum es importante tener en cuenta que es en la programación de las diferentes materias y en su ejecución en las aulas donde se decide la calidad de la formación de los profesionales.
Los profesionales con formación en modelación matemática adquieren capacidades que los enriquecen y los hacen más competitivos.
Cuando usamos matemáticas para resolver problemas del mundo real nuestra intención es obtener un modelo matemático que describa o represente algún aspecto de esa situación. Pretendemos que el modelo nos ayude a entender el fenómeno y nos sirva para predecir lo que pasaría en la situación real, tanto en condiciones normales como al modificar algún factor que intervenga en el modelo. La formulación de un modelo matemático puede ser una tarea desafiante en varios problemas.
Debido a la complejidad de los fenómenos del mundo real, casi siempre se tienen que hacer simplificaciones al construir un modelo matemático. Por ello se hace necesario distinguir claramente entre el modelo como representación y la realidad misma. Para un fenómeno particular es posible construir varios modelos, unos quizás enfocados a algunas características del fenómeno, otros a otras, unos más complejos, otros más simples. Para determinar si un modelo es apropiado o no a una cierta situación, nos basamos en las limitaciones que se generan en el propio diseño del modelo.
La modelación matemática es reconocida como una práctica científica y ha sido incorporada a la enseñanza de las matemáticas por la diversidad de significados que aporta (Blum et al, 1989), sin embargo, es necesario dar cuenta de las implicaciones teóricas que conlleva su incorporación en la enseñanza y de los cambios que se producen en la naturaleza de las matemáticas que se aprenden.
Con respecto a la modelización matemática como estrategia de aprendizaje (Perilla et al., 2005) plantea algunas ventajas de la utilización de modelos como estrategia de aprendizaje
Desde la óptica del docente:

- Cambia el rol del profesor universitario de dictador de clase a dirigir la clase.
- Desarrolla mayor capacidad de preparación de conocimientos asociados a su disciplina.
- Toma una actitud abierta a la posibilidad de que sus estudiantes superen los elementos propuestos en la asignatura.
- Adquiere disponibilidad a que sus estudiantes conozcan y manejen elementos técnicos y teóricos diferentes al de su disciplina
- Se convierte en un buscador de puentes entre la teoría y la práctica

Desde la óptica del alumno:

- Valoran las matemáticas como herramienta de modelación para la toma de decisiones.
- Se involucran personalmente en su aprendizaje.
- Desarrollan capacidades de asociar conocimientos de diferentes disciplinas.
- Ejercen habilidades de toma de decisiones y liderazgo.
- Ven el conocimiento como un todo y valoran el aprendizaje en cualquier asignatura.
- Desarrollan habilidades complejas en el análisis matemático aplicado.
- Utilizan la tecnología como herramienta facilitadora en el modelación matemática.
- Mejoran el grado de motivación hacia el estudio de la asignatura.

3 LA EXPERIENCIA

Como experiencia de modelación se analiza un taller dirigido a alumnos en el que se estudia la correspondencia entre el concepto de Integral definida y algunos temas de Fisica como Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado, Campo eléctrico de una distribución continua de carga, momento de inercia de un cuerpo, trabajo de una fuerza variable.

Los alumnos participantes tienen conceptos de Cálculo en una variable y han desarrollado los contenidos de mecánica básica con aplicación de los conceptos de derivada e integral o en forma algebraica y/o geométrica.

En este caso se parte de la definición de Integral Definida, donde $f(x)$ es una función continua definida para $a \leq x \leq b$.
la integral definida de $f(x)$ entre a y b es el número

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot \Delta x,$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ se obtiene dividiendo el intervalo [a, b] en n subintervalos de igual ancho.
La integral definida es un número que no depende de x. dicho número mide el área comprendida entre la curva representava de la función, el eje x y las rectas paralelas al eje y de abscisas a y b. Aunque esta definición básicamente tiene su motivación en el problema de cálculo de áreas, se aplica para muchas otras situaciones. La definición de la integral definida es válida aún cuando f(x) tome valores negativos (es decir cuando la gráfica se encuentre debajo del eje x). Sin embargo, en este caso el número resultante no es el área entre la gráfica y el eje x.

Desde el punto de vista de las aplicaciones físicas, el Teorema Fundamental del cálculo integral nos dice que si $f(x)$ es la razón de cambio de una cierta magnitud F con relación a una magnitud x, que se puede expresar como $f(x)=\dfrac{dF}{dx}$, entonces el cambio total o acumulado de F al variar x de a hasta b se expresa por:

$$F = \int_a^b dF = \int_a^b f(x)\,dx$$

donde la razón de cambio $f(x)$ se mide en unidades de F por unidad de x y el cambio total $\int_a^b f(x)\,dx$ se mide en unidades de F.

En el desarrollo del Taller se plantea un problema de Física y se establece la necesidad de que el alumno diferencie el concepto puramente matemático de la integral definida con la interpretación física del fenómeno. El análisis de las variables intervinientes en el problema y las condiciones específicas de éste induce a reconocer a la Integral definida como el modelo matemático de la situación planteada.
Los problemas propuestos son:
Espacio recorrido por un móvil en MRUV en un tiempo dado.
Trabajo de una fuerza variable en un desplazamiento dado.
Momento de Inercia de una distribución continua de masa en relación con un eje dado.
Cálculo del campo eléctrico debido a una distribución continua de carga a una distancia del mismo.

Un ejemplo:

Se plantea un ejemplo de aplicación de la integral definida al análisis del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.
La utilización de la integral definida en física nos permite encontrar la ecuación del movimiento uniformemente variado, a partir de la definición de velocidad que varía con aceleración constante.
El espacio recorrido en un cierto tiempo **t**, es la suma de los espacios recorridos ***dx*** en periodos elementales de tiempo ***dt***, con velocidad variable.
Si la aceleración es constante, la velocidad en un instante **t** está dada por la ecuación $v=v_0+a.t$
Dado que por definición la velocidad es la tasa de variación de la posición en función del tiempo, tenemos que v(t)=dx/dt, o sea dx=v(t).dt.

Aplicando la definición de integral, tenemos que

$$x(t) = \int v(t)\,dt$$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} (v_0\,dt + a\cdot t\cdot dt)$$

De lo que resulta:

$$x = v_0\,t + a\cdot\frac{t^2}{2}$$

que es la fórmula conocida.

En este caso y considerando la gráfica velocidad en función del tiempo se deduce que el área bajo la curva representa el espacio recorrido por el móvil. En el ejemplo se observa claramente:

Problema:
Calcular la distancia recorrida en el intervalo $t_0=0$ s, $t_1=4$ s, por un móvil que se desplaza con

aceleración constante a = 2 m/s^2 a partir de una velocidad inicial v = 3 m/s.

La función $v=v_0+a.t$ bajo la forma v = 3 [m/s]+2[m/s^2].t[s] se integra en el intervalo solicitado.

Se obtiene el área bajo la curva A = 28 que representa en metros el espacio recorrido por el móvil.

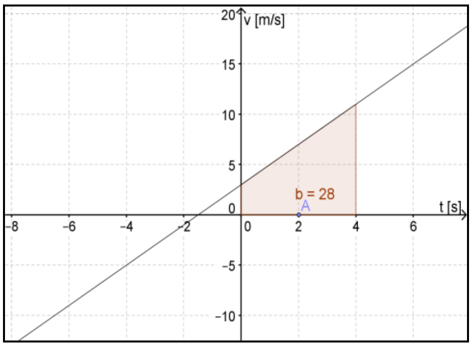

Gráfico 1: área de la función v=f(t)

Desde el punto de vista matemático se requiere en este ejemplo el conocimiento del concepto de integral definida para reconocer las relaciones existentes entre las variables intervinientes, las condiciones de posibilidad y la interpretación de los gráficos correspondientes; desde el punto de vista físico requiere - en este caso particular- del análisis de las variables del movimiento, sus unidades, las relaciones entre ellos, las ecuaciones que definen tales relaciones y los supuestos que permiten su aplicación. A partir de allí se desarrolla la habilidad para establecer correspondencia entre el concepto matemático y el fenómeno físico.

Otras habilidades que debe desarrollar el alumno a partir del trabajo con ejemplos de esta naturaleza son la de la interpretación de las ecuaciones a través del análisis dimensional y la interpretación de gráficos.

4 CONCLUSIONES

La búsqueda y aplicación de modelos matemáticos para la resolución de problemas –en este caso de la física- requiere de habilidades que deben ser desarrolladas también en los docentes;

El espacio extracurricular, que también puede ser un espacio curricular de integración, parece ser el ámbito apropiado en cuanto permite aplicar conceptos y procedimientos de diferentes materias.

En el proceso de modelización se profundiza la comprensión tanto de los conceptos matemáticos como de los fenómenos físicos.

La actividad de los alumnos tiende a ser más colaborativa e independiente del profesor.

5 REFERENCIAS

Araya, R. *Inteligencia Matemática*. Editorial Universitaria. 2000.

Blum, W.; Berry, J.; Biehler, R.; Huntley, I.; Kaiser-Messmer, G. & L . Profke. *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*. Ellis Horwood Limited Publishers. p. xiv. 1989.

Herrera, C.G.; Verón, C. & L. Medina: Habilidades matemáticas en alumnos ingresantes a la carrera de Licenciatura en Geología de la UNCa. *Investigaciones en Facultades de Ingeniería del NOA*. Pag. 115-119. 2011

Herrera, C.G.; Ortiz, E.; Moreno, O.E. & L. Medina: Modelización matemática. Propuesta didáctica de articulación entre Matemática, Física y Geofísica. *VII Jornadas De Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingneniería del NOA*. 2012.

Herrera, C.G.; Ortiz, E. & L. Medina: Habilidades matemáticas de alumnos ingresantes a la carrera de Licenciatura en Geología. Generalización de conceptos matemáticos a otras ciencias. *III Congreso Internacional de Educación en Ciencia y Tecnología*. Catamarca. Argentina. 2013

Medina, L. & E. Zotto: Aplicación de Software Libre en la modelización matemática de fenómenos estudiados en física I de la Licenciatura en Geología. *Investigaciones en Facultades de Ingeniería del NOA*. 251-257. 2011

Perilla, M.& M. Restrepo Lopez. : *La modelación matemática como estrategia de enseñanza aprendizaje. Universidad de La Sabana*. Bogota. Colombia. 2005

Verón, C.; Dip, H.R. & C. G. Herrera. Procedimientos generales matemáticos en alumnos de primer año de la licenciatura en Geología. Estudio de caso: la derivada. *VII Jornadas De Ciencia y Tecnología de Facultades de Ingneniería del NOA*. 2012.

Young, H. & R. Freedman: *Física Universitaria*. Volumen I. Desimosegunda edición. Pearson Educación. Mexico D.F. 2009.