Utilización del Geogebra como herramienta auxiliar y motivadora en el aprendizaje significativo de cónicas

José V. Giliberti[1] & Florencia M. Alurralde[2]

(1) Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta.
gilijv@gmail.com

(2) Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta.
falurral@unsa.edu.ar

RESUMEN: En la ciencia y en particular en la matemática la adquisición de nuevos conocimientos se vincula estrechamente con los procesos de construcción de modelos y la resolución de problemas. Los estudiantes deben realizar tareas como la modelización de las situaciones reales, identificar variables, proponer alternativas de solución, evaluar, acotar y verificar resultados, etc. La incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) en los cursos básicos del nivel universitario como herramienta auxiliar en la modelización permite la visualización de situaciones complejas que intervienen en la comprensión de conceptos matemáticos y resolución de problemas, sin dejar de lado el objeto de estudio, es decir la construcción del pensamiento matemático de los alumnos. En tal sentido el software de geometría dinámica Geogebra, posibilita que el estudiante se familiarice con algunos objetos geométricos, que realice verificaciones y experimente, añadiendo significado al aprendizaje tradicional. Este trabajo presenta una experiencia sobre la utilización de Geogebra en la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica del primer cuatrimestre del primer año de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta, enfocada específicamente en el tema Cónicas.

INTRODUCCIÓN

Las actualizaciones de los Planes de Estudio de las carreras de Ingeniería, previas a la Acreditación, significaron el paso de planes de estudio de seis años de duración a cinco años, lo que llevó a una selección de contenidos de acuerdo a los tiempos disponibles.
El Consejo Federal de Decanos de Ingeniería consideró que trabajar por competencias podría dar un marco que facilite una selección y tratamiento más eficaz de los contenidos para que el ingeniero no sólo sepa, sino que también haga.
Se entiende por competencia la capacidad de articular eficazmente un conjunto de esquemas (estructuras mentales) y valores, permitiendo movilizar (poner a disposición) distintos saberes, en un determinado contexto con el fin de resolver situaciones profesionales.
En el 2006 el CONFEDI elaboró un listado de diez competencias genéricas de la Ingeniería desagregadas en capacidades como por ejemplo: la de implementar tecnológicamente una alternativa de solución mediante modelizaciones que destacan los rasgos y propiedades más importantes de una situación real, capacidad para adaptarse a cambios y tomar decisiones, disposición para aprender nuevos conocimientos, creatividad para resolver problemas, etc.
La tecnología ha invadido, especialmente en las últimas décadas, el ámbito cultural y también el educativo. En esta nueva sociedad se requiere, cada vez más, una participación activa a través de las TIC.
Esta situación implica el aprendizaje de competencias de gestión de información, comunicación, intercambio con otros en un mundo global, capacidad de innovación, y actualización permanente. Teniendo como objetivos principales la reducción de la brecha digital y mejorar la educación pública en la escuela secundaria, el Estado nacional creó en el año 2010 el Programa Conectar Igualdad.
Así la inclusión de las nuevas tecnologías en la formación de profesionales se hace relevante desde los niveles iniciales en las carreras universitarias, pero no pretende reemplazar al conocimiento sino ayudar a la construcción significativa del mismo.
La integración de las TICs a la educación y en particular a la modelización y resolución de problemas produce un enriquecimiento en la visualización de situaciones complejas y en la verificación de algunos conceptos y propiedades matemáticas, favoreciendo la adquisición de competencias y actuando además como elemento motivador para el estudiante.

OBJETIVOS

- Introducir el uso de las TIC como elemento motivador en el aprendizaje en la asignatura ALGA.
- Favorecer el aprendizaje significativo del tema cónicas con ayuda del software de geometría dinámica Geogebra.

MARCO TEÓRICO

Desde el constructivismo, Ausubel plantea su Teoría del Aprendizaje, en la que pone énfasis en la potencia del aprendizaje significativo, en contraste con el aprendizaje por repetición, describe también la importancia que tienen los conocimientos previos en la adquisición de nuevos conocimientos**.**

La estructura cognitiva previa del alumno se relaciona con la nueva información, siendo la estructura cognitiva, el conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.

El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información se relaciona con conceptos ya existentes llamados inclusores o subsumidores.

La nueva información adquirida en el aprendizaje significativo se almacena en forma algo modificada, y a su vez modifica los inclusores. La repetición de este proceso lleva a una diferenciación progresiva de los conceptos subsumidores, quienes se eslabonan y modifican constantemente adquiriendo nuevos significados.

Así el proceso de incorporación de conceptos pasa por la etapa de formación y asimilación de los mismos, hasta lograr un nivel de relación en la estructura cognitiva, que muestre la presencia de inclusores que sirven como anclaje de los nuevos conceptos que se adquieren por aprendizaje significativo.

La recombinación (nuevas relaciones) de elementos previamente existentes en la estructura cognitiva es llamada por Ausubel reconciliación integradora**.**

El desenvolvimiento cognitivo es un proceso dinámico en el que nuevos significados están constantemente interactuando con una estructura cognitiva más diferenciada que tiende a una organización jerárquica, en la que los conceptos y proposiciones más generales ocupan el ápice de la estructura.

Como docentes debemos generar el clima adecuado para que se desarrolle y se favorezca una actitud de aprendizaje significativa. La motivación es primordial en este proceso (Novak, 1988).

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

El trabajo consistió en incorporar el software Geogebra como un recurso complementario, motivador y novedoso en la resolución del trabajo práctico del tema cónicas en una de las comisiones prácticas (seleccionada al azar) de la asignatura ALGA de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta (U.N.Sa.).

La elección del Geogebra se hizo en función de ser un software que viene incluido en las netbooks que desde hace años entrega el gobierno nacional y además por tratarse de un programa gratuito, lo que significa que está a disposición de todos los alumnos (para descargarlo libremente de internet), sin importar si fueron beneficiados con el programa conectar igualdad o no.

La versión del programa con que se trabajó fue la 4.2.28.0 por ser la más estable en la actualidad. La misma se descargó de la página oficial de Geogebra.

Etapas

- Elaboración del trabajo práctico teniendo en cuenta ejercicios típicos de diferentes grados de complejidad y aplicaciones del tema en la vida real.
- Recolección de información acerca de la disponibilidad de PCs o computadoras portátiles en la cual se obtuvo lo siguiente: un 50% tenía acceso a una computadora portátil (de los cuáles el 25% corresponden a las del Programa Conectar Igualdad). El resto tenía la posibilidad de trabajar en el centro de cómputos de la Facultad o del gabinete del centro de estudiantes.
- Presentación del soft y explicación del uso básico del mismo. Conjuntamente se habilitó una dirección de correo electrónico para aclarar dudas como alternativa a la consulta habitual dictada por los docentes de la cátedra.
- División de la comisión en grupos de acuerdo a la afinidad personal, a la cantidad de alumnos y a los ítems para trabajar del práctico. El número total de grupos fue 10 de aproximadamente 4 integrantes cada uno.
- Asignación de la actividad a cada grupo (la cual se indica más adelante).
- Exposición final.
- Encuesta escrita y anónima que permitió obtener información sobre: autoevaluación del alumno, evaluación del docente y evaluación de la experiencia.

Cabe aclarar que, para afectar lo menos posible el régimen normal de cursado de los alumnos que participaron, la experiencia se desarrolló dentro de los horarios previstos en el cronograma para las clases de la asignatura y sus correspondientes horarios de consulta.

RESULTADOS

Teniendo en cuenta que los objetivos del trabajo fueron que el alumno conozca el software Geogebra y haga uso básico del mismo; obtenga y visualice gráficos y verifique resultados de los valores obtenidos en un ejercicio del trabajo práctico y compruebe la definición de cónica como lugar geométrico; se observó lo siguiente:

Todos los grupos completaron el trabajo en tiempo y forma.

Algunos grupos utilizaron para su exposición final programas de ofimática como el Word y el Powerpoint, aunque éste no era un requerimiento previamente solicitado.

De la cantidad inicial de alumnos que inició la experiencia hubo un 30% que no participó de la exposición final y de la encuesta.

A continuación se presenta parte del trabajo realizado por el grupo Nº 2.

Actividad grupal a realizar:

- Presentar el desarrollo del ejercicio 5 (inciso c) en forma escrita.
- Indicar las fórmulas y pasos empleados en la resolución del mismo.
- Realizar una verificación de todos los resultados con Geogebra.
- Comprobar la definición de parábola como lugar geométrico.
- Hacer una exposición de la actividad en un tiempo no mayor a 7 minutos.

Ejercicio N° 5 c)

Encontrar la ecuación de la parábola que tiene vértice sobre la recta r: 2y – 3x = 0, eje paralelo al eje x y pasa por los puntos D (3, 5) y E (6, –1).

Desarrollo

1º - Como el eje de la parábola es paralelo al eje x, es una parábola horizontal y tiene una ecuación del tipo:

$$(y-k)^2 = 4p\,(x-h) \qquad (1)$$

2°- El vértice de coordenadas (h, k) pertenece a la recta r, entonces verifica su ecuación:

$$2k-3h=0 \qquad (2)$$

$$h=\frac{2}{3}k \qquad (3)$$

3°- Los puntos D y E pertenecen a la parábola por lo tanto, verifican su ecuación. Si reemplazamos las coordenadas de los puntos en la ecuación, obtenemos dos ecuaciones de las cuales se puede obtener el valor de 4p.

En D = (3, 5)

$$(5-k)^2 = 4p\left(3-\frac{2}{3}k\right) \qquad (4)$$

$$4p=\frac{(5-k)^2}{\left(3-\frac{2}{3}k\right)} \qquad (5)$$

En E = (6, –1)

$$(-1-k)^2 = 4p\left(6-\frac{2}{3}k\right) \qquad (6)$$

$$4p=\frac{(-1-k)^2}{\left(6-\frac{2}{3}k\right)} \qquad (7)$$

Igualando los lados derechos de (5) y (7), tenemos:

$$\frac{(5-k)^2}{\left(3-\frac{2}{3}k\right)}=\frac{(-1-k)^2}{\left(6-\frac{2}{3}k\right)} \qquad (8)$$

Operando llegamos a:

$$11\,k^2-82k+147=0 \qquad (9)$$

Las soluciones son:

$$k_1=\frac{49}{11} \qquad (10)$$

$$k_2=3 \qquad (11)$$

Los valores de h correspondientes son:

$$h_1=\frac{98}{33} \qquad (12)$$

$$h_2=2 \qquad (13)$$

El vértice de la parábola 1 es:

$$V_1=\left(\frac{98}{33},\frac{49}{11}\right) \qquad (14)$$

El vértice de la parábola 2 es:

$$V_2=(2,\ 3) \qquad (15)$$

4°- Con los valores de h y de k para 2 vértices distintos, se puede calcular cual es el valor de 4p.

$$4p_1=\frac{108}{11} \qquad (16)$$

$$4p_2=4 \qquad (17)$$

Hay 2 soluciones. La ecuación de la parábola 1es:

$$\left(y-\frac{49}{11}\right)^2=\frac{108}{11}\left(x-\frac{98}{33}\right) \qquad (18)$$

La ecuación de la parábola 2 es:

$$(y-3)^2=4\,(x-2) \qquad (19)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de las parábolas procederemos a la determinación de los elementos de cada una de ellas.

Parámetro p

Para la parábola 1 es:

$$p=\frac{27}{11} \qquad (20)$$

Para la parábola 2 es:

$$p=1 \qquad (21)$$

Foco

El vértice y el foco están situados sobre el eje de simetría, y este es paralelo al eje x, entonces la ordenada del foco es la misma que la del vértice. Si el vértice está a una distancia p del foco, entonces sumamos (se suma porque la orientación de la parábola es cóncava positiva) a la coordenada h del vértice esta distancia para obtener la abscisa del foco.

$$F = \left(h + p,\ k\right) \quad (22)$$

Luego para la parábola 1

$$F_1 = \left(\frac{179}{33},\ \frac{49}{11}\right) \quad (23)$$

Para la parábola 2

$$F_2 = \left(3,\ 3\right) \quad (24)$$

Directriz

Como la directriz es una recta que corta al eje de la parábola perpendicularmente y está a una distancia p del vértice, entonces tomamos la siguiente formula:

$$x = h - p \quad (25)$$

Para la parábola 1

$$x = \frac{17}{33} \quad (26)$$

Para la parábola 2

$$x = 1 \quad (27)$$

Ejes de simetría

El eje de simetría es una recta que pasa por el vértice y es perpendicular a la directriz.

Para la parábola 1:

$$y = \frac{49}{11} \quad (28)$$

Para la parábola 2:

$$y = 3 \quad (29)$$

A continuación en la Fig.1 muestra la representación o vista geométrica, de las parábolas, sus elementos (vértices, focos, directrices, ejes de simetría) y la verificación de la definición de parábola como lugar geométrico. En la Fig.2 se aprecia la vista algebraica (ecuaciones, distancias y puntos) de los resultados obtenidos en el mismo inciso. Ambas gráficas fueron obtenidas de las diferentes visualizaciones para los objetos geométricos que presenta el Geogebra.

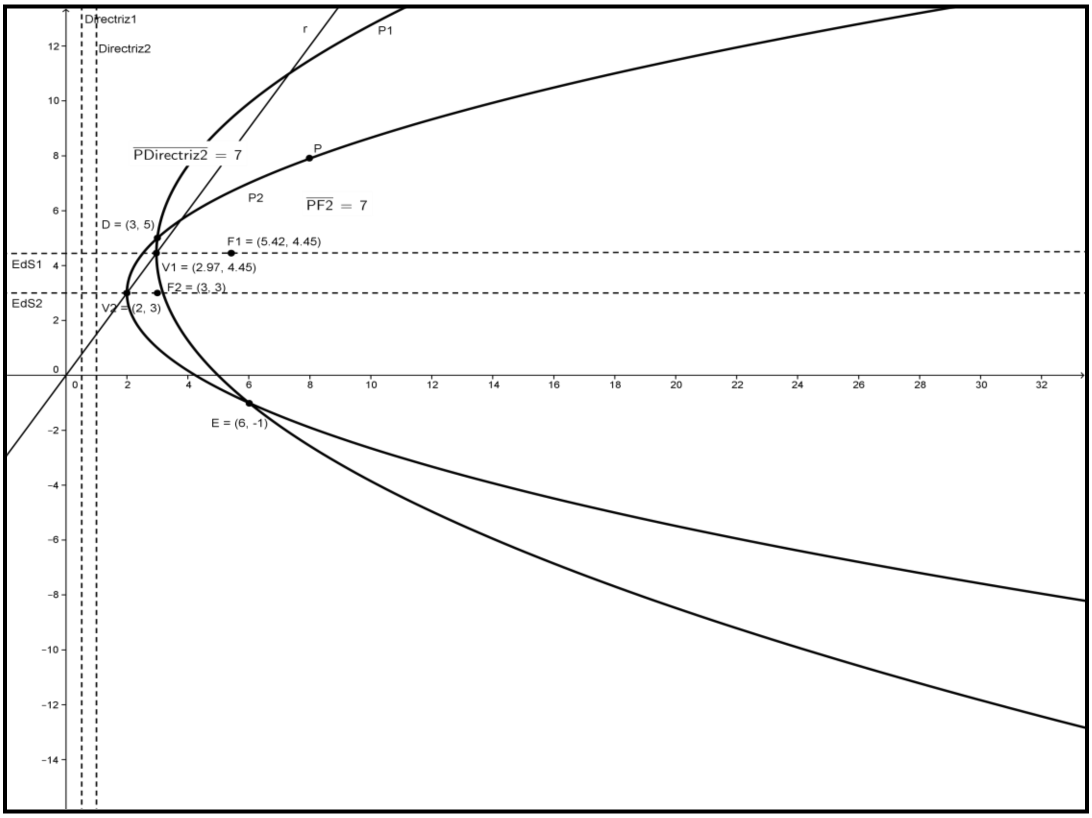

Figura 1 – Vista geométrica del ejercicio 5c obtenida con Geogebra (versión 4.2.28.0)

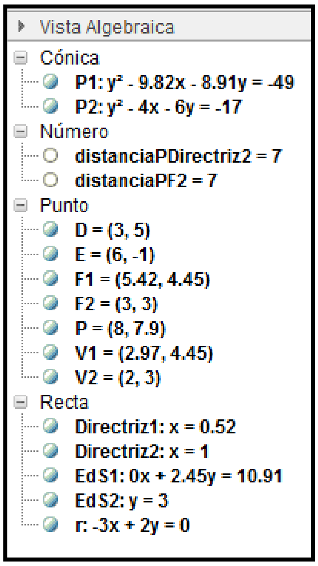

Fig. 2. Vista algebraica del ejercicio 5c

Ejercicio 5d

Al considerar que el eje de la parábola es paralelo al eje x, se deduce que es horizontal y por lo tanto su ecuación general tiene la forma:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{30}$$

Los puntos S, T y U ∈ a la Parábola, ∴ verifican su ecuación.

$$S(-1,3) \to -D + 3E + F = -9 \tag{31}$$

$$T(-4,0) \to -4D + F = 0 \tag{32}$$

$$U(6,-1) \to 8D + 6E + F = -36 \tag{33}$$

Las ecuaciones (30), (31) y (32) forman un sistema de 3 ecuaciones con 3 variables cuya solución son los valores de D, E y F de la ecuación general. El sistema se resolvió por el método de sustitución y la solución es:

$$D = -3 \tag{34}$$

$$F = -12 \tag{35}$$

$$E = 0 \tag{36}$$

La ecuación general y la ecuación normal de la parábola son respectivamente:

$$y^2 - 3x - 12 = 0 \tag{37}$$

$$y^2 = 3\,(x + 4) \tag{38}$$

Elementos

Parámetro p

En la ecuación de la parábola, 4p es igual a 3, luego:

$$p = \frac{3}{4} \tag{39}$$

Vértice

De la ecuación normal obtenemos las coordenadas (h, k) del vértice.

$$V = (-4,\ 0) \tag{40}$$

Foco

Como el vértice y el foco están situados sobre el eje de simetría, y este es paralelo al eje x, entonces la ordenada del foco es la misma que la del vértice.

Si el vértice está a una distancia p del foco, entonces sumamos (se suma porque la orientación de la parábola es cóncava positiva) a la coordenada h del vértice esta distancia para obtener la abscisa del foco.

$$F = (h + p\ ,\ 0) \tag{41}$$

Reemplazando valores tenemos:

$$F = \left(-\frac{13}{4},\ 0\right) \tag{42}$$

Directriz

Como la directriz es una recta que corta al eje de la parábola perpendicularmente y está a una distancia p del vértice, entonces tomamos la siguiente ecuación:

$$x = h - p \tag{43}$$

Reemplazando valores tenemos:

$$x = -\frac{19}{4} \tag{44}$$

Eje de simetría

El eje de simetría pasa por el foco y el vértice, por lo tanto su ecuación es:

$$y = 0 \tag{45}$$

Como en el inciso anterior en la Fig. 3 se muestra la vista algebraica y en la Fig. 4 la vista geométrica en la cual se puede apreciar la verificación de que la longitud del lado recto es igual a 4p.

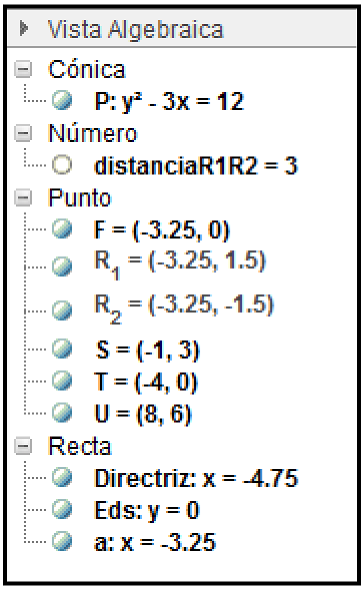

Figura 3. Vista algebraica ejercicio 5d.

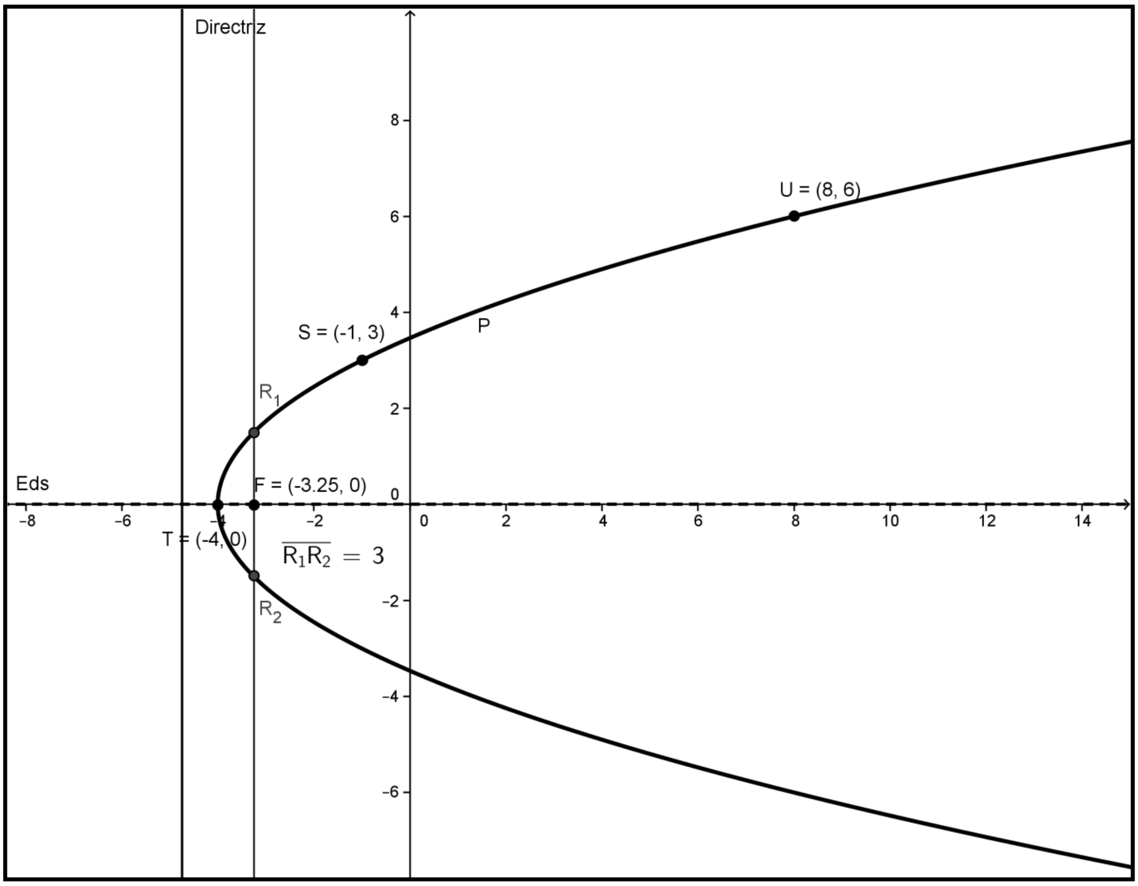

Figura 4. Vista geométrica ejercicio 5d.

ENCUESTAS

De las encuestas podemos destacar los siguientes aspectos:

Autoevaluación del alumno

El 46 % manifestó conocer el Geogebra antes de la experiencia.
El 70 % consideró que después de la actividad su nivel de conocimientos del tema cónicas fue bueno.

Evaluación del docente

El 82 % consideró que el docente motivó lo suficiente para realizar la experiencia con el software.
El 100 % de los estudiantes respondió que el docente promovió la experimentación con el soft y respondió las consultas sobre el mismo.

Evaluación de la experiencia

A pesar de tratarse de una actividad grupal se observó que un 4 % prefirió trabajar sólo.
El 96 % consideró que la experiencia lo ayudó a comprender mejor el tema y que fue una experiencia interesante.
El 46 % respondió que trabajar en grupo fue positivo, el 32 % muy positivo y el 18% regular.
El 36 % valoró la experiencia con Geogebra como muy positiva, el 50 % como positiva y el 18 % como regular.
El 93 % de los estudiantes consideró útil emplear el Geogebra en otros temas de la asignatura.

CONCLUSIONES

Si bien la experiencia fue realizada con carácter de piloto y en forma no obligatoria, consideramos importante mencionar la buena disposición de los alumnos para participar de la experiencia y responder las preguntas de la encuesta.
Los resultados obtenidos nos indican que los estudiantes se mostraron interesados por la experiencia. Por otra parte, esta nueva forma de visualización simultánea (vista geométrica y vista algebraica), verificar y experimentar con las cónicas (sus elementos y parámetros), fue

recibida con gran entusiasmo en un gran porcentaje de alumnos.

Otro aspecto positivo de esta experiencia es la incorporación de las netbooks al proceso de aprendizaje, ya que en muchos casos sólo son utilizadas con fines de entretenimiento.

El presente trabajo sirvió también como punto de partida y nos da pie, en primer lugar, a trasladar la experiencia a otros temas de la asignatura y luego en una etapa posterior a trabajar en forma conjunta con las otras asignaturas que se dictan simultáneamente, en el mismo año y cuatrimestre de la carrera.

Cabe destacar también que la motivación generada en los alumnos hizo que uno de los grupos trabajara con otro programa (Cinema 4D) que permite la creación de objetos en 3D, cuya utilización podría contribuir en la visualización, comprensión y experimentación de otro tema relacionado con éste, como cuádricas.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D., J. Novak & H. Hanesian, *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. Ed. Trillas, México, 1983.

Novak, J.& B. Gowin, *Aprendiendo a Aprender*, Ed. Martínez Roca, Barcelona, España, 1988.

Sanchez Rosal, A., Incorporación de las TICs en el aprendizaje de las matemáticas en el sector universitario, *Revista de Educación Matemática, Unión Matemática Argentina*, Vol. 27 – Nº 3, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 23–38, 2012.

de Oteyza de Oteyza, E., E. Osnaya & Otros, *Geometría Analítica y Trigonometría*, Pearson Educación, Prentice Hall, México, 2001.

Kindle, J., Geometría Analítica, Serie Schaum, Mc Graw Hill, México, 2007.

Santos, N. & M. Stipcich, *Fundamentación del curso La resolución de problemas de Matemática y Física con TIC*, dictado en la Facultad de Ingeniería de la U.N.Sa. Res N° 439 HCD-1. Julio de 2011

Kozak, A., S. Pastorelli & P. Vardanega, *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal*, Mc Graw Hill, Buenos Aires, 2007.

Geogebra, Descarga-Instalación de Geogebra, http://www.geogebra.org/cms/es/download/, 2013.

Ejemplos diversos de webs interactivas de matemática, Estudio de las cónicas, http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/conicas.htm, 2012.

Tutorial Geogebra Cónicas, http://www.youtube.com/watch?v=9kaIhpM5Rc4, 2011.

Geogebra en la Enseñanza de las Matemáticas, http://geogebra.es/cvg/presentacion/contenidos.html, 2011.