El conocimiento matemático como signo

José I. Gómez[1], Elsa del V. Ibarra[2] y Darío J. Lutfi[3]

(1)Facultad de Agronomía y Agroindustrias. UNSE.
jgomez@unse.edu.ar

(2)Facultad de Ciencias Forestales UNSE
egomez@unse.edu.ar

(3)Facultad de Agronomía y Agroindustrias. UNSE.
dlutfi@unse.edu.ar

RESUMEN

Este tema se ubica en el marco de investigación en el área de cognición matemática. Se aborda el estudio de elementos que están presentes en un texto de matemática – concretamente un problema- y se esboza una nueva concepción de conocimiento, en términos de entidades relacionales y signos. En la primera parte de la investigación se trabaja con la noción de entidades constitutivas en la resolución de problemas; luego se realiza una clasificación de dichas entidades por niveles y finalmente se concibe el conocimiento, como una entidad de tipo asertiva, en un nivel superior de las entidades relacionales. Dada la ubicación teórica de este trabajo –cognición matemáticas- se aborda brevemente algunos estudios de lenguaje, signos y de enfoques teóricos afines, tales como la teoría de Campos Conceptuales de G. Vergnaud, y el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática de Godino, Batanero y Font, entre otros.
Palabras clave: Cognición matemática- entidades constitutivas- lenguaje- signo.

MARCO TEÓRICO DEL TEMA

Acerca de la noción de signo

Para Ferdinand de Saussure, el signo lingüístico es una entidad psíquica de dos caras: concepto e imagen acústica, que están íntimamente unidos y se reclaman recíprocamente. (Cf Curso de Lingüística General, p.91) Saussure llama *signo* a esta combinación del concepto y de la imagen acústica. Propone conservar la palabra *signo* para designar el conjunto, y reemplazar *concepto e imagen acústica r*espectivamente con *significado y significante.* Estos dos últimos términos tienen la ventaja de señalar la oposición que los separa, sea entre ellos dos, sea del total de que forman parte. (Ibid p.92)
Louis Hjelmslev, considera la noción de función, como la dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Los terminales de una función, es decir los términos que se relacionan, se llaman funtivos. Introduce la noción de función de signo, como la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido.
Estos dos términos son las designaciones de los funtivos que contraen la función de signo. En este enfoque, la dicotomía de Saussure: significado/significante, es reelaborada como una relación entre dos planos: contenido/ expresión.
Según Charles Sanders Peirce, “un signo, o representamen, es algo que, para alguien, representa o se refiere a algo en algún aspecto o carácter. Se dirige a alguien, esto es, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o, tal vez, un signo aun más desarrollado. Este signo creado es lo que llamo el interpretante del primer signo. El signo está en lugar de algo, su objeto. Está en lugar de ese objeto...sólo con referencia a una suerte de idea, que a veces he llamado el fundamento del representamen”. (Nº 228, The Collected Papers)
Peirce sostiene que para que “algo sea un Signo, debe "representar", como solemos decir, a otra cosa, llamada su *Objeto*, aunque la condición de que el Signo debe ser distinto de su Objeto es, tal vez, arbitraria.” (Ibid, Nº 228)
Humberto Ecco, afirma que “cuando un código asocia los elementos de un sistema transmisor con los elementos de un sistema transmitido, el

primero se convierte en la expresión del segundo, el cual, a su vez, se convierte en el contenido del primero” (Eco, 1979, p.82, 83). Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un plano de la expresión colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos del plano del contenido.
Una función semiótica es una entidad, una función (en el sentido de L. Hjelmslev, no en el sentido gramatical) que se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua.

Nociones de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud

Gerard Vergnaud postula que el conocimiento se encuentra organizado en *campos conceptuales* de los cuales los sujetos se apropian a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje. (Vergnaud, 1982, p. 40) Su concepción del conocimiento- al igual que para Piaget- es el de un proceso de adaptación. Para Vergnaud, un campo conceptual es un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros, y probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición.
La Teoría de Vergnaud considera que los conceptos están constituidos por elementos que se relacionan. Estos elementos responden a un conjunto de situaciones, invariantes operatorios y sus propiedades que se expresan por medio de diferentes representaciones simbólicas. Estas consideraciones llevan a definir un concepto como un triplete de conjuntos. Un concepto es una terna de tres conjuntos: $C = (S, I, R)$, donde S es un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto; son los referentes del concepto; I es un conjunto de invariantes operatorios en que se basa la operacionalidad de los esquemas; es el significado del concepto; y R es el conjunto de formas del lenguaje que permiten representar simbólicamente un concepto; es el significante del concepto.
Una situación es entendida como una tarea y toda situación compleja es una combinación de tareas y problemas, de modo que los procesos cognitivos y las respuestas cognitivas de un sujeto están determinados por las situaciones que enfrenta.
Un esquema resulta ser un modo de acción que es estable, frente a un conjunto de situaciones. El sujeto resuelve ese conjunto de situaciones que le es familiar de la misma manera, capta la situación como perteneciente a una clase y actúa en forma invariante. Las expresiones concepto-en-acción y teoremas-en acción designan los conocimientos contenidos en los esquemas; y son designados por la expresión más global de invariantes operatorios.

ALGUNAS RELACIONES DE LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES CON OTROS DESARROLLOS TEÓRICOS DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

La Teoría del Aprendizaje Significativo es una teoría cognitiva del aprendizaje o también considerada como una teoría psicológica del aprendizaje en el aula.
En la misma Ausubel (1963) brinda un marco teórico que pretende dar cuenta de los mecanismos por los que se lleva a cabo la adquisición y retención de los grandes cuerpos de significado que se manejan en la escuela. En la misma se pone énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprenden, en la naturaleza de ese aprendizaje, en las condiciones que se requieren para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación (Ausubel, 1976, citado por Rodríguez Palermo, 2004). El concepto clave de la teoría es justamente el “aprendizaje significativo”.
Su vínculo con la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, surge por el hecho de ser, al igual que la segunda, una teoría psicológica que trata los procesos implicados en la cognición con el propósito de facilitar una mejor comprensión de los mismos.
Ambas teorías coinciden en considerar que la significatividad del aprendizaje es proceso progresivo que requiere tiempo. En ambas, además se hace necesario llevar a cabo el análisis conceptual del contenido objeto de estudio.

Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

La noción de juego de lenguaje de Wittgenstein, (Wittgenstein, p.10) se refiere al todo formado por el lenguaje y las acciones con las que está entretejido. En la actividad matemática en el aula, se da un juego de lenguaje que tiene que ver naturalmente con el contexto institucional en que se realiza. En el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas, según el juego de lenguaje en que

participan, pueden ser consideradas en términos de las siguientes facetas o dimensiones duales: Personal- institucional; Ostensivo- no ostensivo; Expresión- contenido: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica; Unitario – sistémico.
Diaz Godino (2010) en su idea de confrontar algunas herramientas teóricas de la Didáctica de la Matemática para su integración, considera que la noción de conocimiento que él propone en su Teoría de las Funciones Semióticas y la ontología matemática que le asocia podrían permitir dicha confrontación.

Las entidades constitutivas en la resolución de problemas

En el trabajo matemático de resolver problemas que admiten solución, es posible dar con ese eslabón principal que unido a todos los demás eslabones cierre la resolución del problema planteado, con la adecuada confrontación del resultado con la situación abordada. Se identificará como entidades constitutivas de un problema a aquellos objetos que aparecen en el sistema de representación del problema, o los elementos lingüísticos (símbolos, gráficos, datos, esquemas, proposiciones) y a todo aquello que pueda realizar el papel de signo y que están vinculados con los procesos de pensamiento que involucran conocimientos, estrategias heurísticas y estrategias metacognitivas. En un problema, las entidades cognoscitivas son los elementos que aparecen en el texto mismo, en su planteo y en su resolución, esto es: datos, proposiciones, información, incógnitas, gráficos, símbolos, diagramas y objetos matemáticos de mayor complejidad conceptual Las relaciones asertivas son elementos emergentes de los procesos de pensamiento que se llevan a cabo a través de prácticas efectivas, en la actividad matemática, dentro y fuera del aula, y son generadoras de soluciones de problemas matemáticos apropiados. La relación asertiva es una noción en construcción, de naturaleza cognitiva, que tiene lugar al interior de la mente del alumno, en su actividad matemática creadora. Son correspondencias que el alumno puede construir en el proceso de comprensión y de creación matemática.
Consideramos que cualquier procedimiento que se aplique en la resolución de un problema, siguiendo algún plan de resolución entraña la búsqueda de relaciones eventualmente existentes entre los datos del problema y su solución.
La comprensión del problema estará dada por las relaciones asertivas construidas entre datos e incógnitas.

Clases de entidades constitutivas

Distinguiremos diversos niveles de entidades constitutivas: *Entidades constitutivas de primer nivel o lingüísticas:* datos, gráficos, símbolos, expresiones técnicas, incógnitas que figuran en el texto del problema. Son los significantes2 de la situación planteada.
Entidades constitutivas de segundo nivel: La asignación de variables, representaciones gráficas, simbólicas, diagramas, esquemas, cálculos, algoritmos y tabulaciones que se pueden realizar como parte de la resolución del problema.
Entidades constitutivas de tercer nivel o relaciones asertivas: Son las relaciones o correspondencias entre entidades de primer nivel o de segundo nivel, con nociones matemáticas más complejas que se hallan en la memoria de corto plazo que están en la mente del alumno. Son las deducciones, el recupero de conceptos, definiciones, propiedades, teoremas que no aparecen en el texto y que pueden emplearse en la resolución del problema.
La categorización por niveles no significa que necesariamente tienen que aparecer todas las entidades en ese orden. Además, en la resolución de un problema se da un movimiento dinámico entre entidades, en el sentido que en una etapa intermedia de la resolución, las entidades que fueron de tercer nivel, pueden ser de segundo nivel en una etapa, hasta encontrarnos con entidades de tercer nivel o relaciones asertivas que involucran la relación buscada entre los datos del problema y la incógnita.
Si tomamos por ejemplo, el *problema de determinar un área máxima de un terreno rectangular, sabiendo que su perímetro es 400 m,* podemos distinguir los tipos de entidades siguientes:
Entidades constitutivas de primer nivel: el dato del perímetro de la región, la región rectangular, la incógnita de determinar el área máxima de la región rectangular, por ejemplo.
Entidades constitutivas de segundo nivel: saber o recordar que el perímetro de una figura geométrica es la suma de los lados de dicha figura, que en el caso de un rectángulo es dos veces la suma de la base y de la altura, saber o recordar que el área del rectángulo es el producto de la base por la altura, asignar variables, la representación gráfica de esta región. Los cálculos que se realizan o se tienen

que realizar *Entidades constitutivas de tercer nivel:* el saber que las dimensiones de la región no pueden ser nulas, que tanto el perímetro como el área son funciones que dependen de las dimensiones de la región, distinguir cuál de ellas va a actuar como función principal y cuál como secundaria, expresar la función principal en términos de una sola variable y luego utilizar los procedimientos que pueden ser gráficos para aproximar el área máxima y las nociones de cálculo diferencial para llegar a la solución del problema, la interpretación del resultado en términos del problema. Las relaciones asertivas son también los recursos de resolución del problema, como es el de plantear la función área, en este caso, desde el punto de vista de una representación geométrica como parábola, cuyo vértice contiene la información requerida.

El conocimiento como entidades relacionales asertivas

La comprensión del problema estará dada por las relaciones asertivas construidas entre datos e incógnitas. Las entidades relacionales asertivas suponen un proceso de pensamiento superior, más elevado que lo que se realiza con el manejo de las entidades anteriores, y una vez establecida esa relación es un conocimiento. La noción de relaciones asertivas en el conjunto de entidades constitutivas de la resolución de problemas es una entidad que está por construirse.

Esos procesos relacionales entre los datos del problema y valores emergentes, son también entidades constitutivas. Podríamos decir que una entidad relacional asertiva es una cadena de eslabones, donde cada uno de éstos, es también una entidad relacional asertiva.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO COMO ADECUACIÓN ENTRE SIGNOS

Con relación a una persona, en particular, a la capacidad de aprender o enseñar, postulamos la existencia de dos universos: uno interior a la persona, que reside en la mente, que tiene existencia en su mente, que podemos llamarlo universo no ostensivo; y otro que está fuera de la persona, que llamaremos universo ostensivo.

Llamaremos lenguaje al conjunto de símbolos, gráficos, expresiones lingüísticas, sintaxis, expresiones escritas, verbales, gestuales. En el universo no ostensivo o interior el lenguaje tiene forma de pensamiento, de ideas, de razonamientos, de procesos de pensamiento; y hay también un lenguaje en el universo externo u ostensivo.

Consideramos como signo, las entidades relacionales (como las funciones semióticas de Ecco o como las funciones de signo de Hjelmslev)) que constan de un plano de expresión y otro de contenido. El plano de contenido es (para nosotros) un subconjunto del universo ostensivo y el plano de expresión es un subconjunto del universo ostensivo como del no ostensivo.

Así, puede haber signo o entidades relacionales donde los funtivos o planos de expresión y de contenido tengan elementos ambos del lenguaje no ostensivo o, del universo ostensivo con elementos del universo no ostensivo, respectivamente. Por ejemplo, cuando uno realiza cálculos en forma mental, multiplicar un número por otro, por ejemplo, se está vinculando elementos del mismo universo no ostensivo.

Aquí podemos valernos de la metáfora de la ley de composición interna, como una entidad que relaciona elementos de lenguaje de un mismo universo, en este caso, no ostensivo o no visible.

Ahora, una función semiótica o conocimiento puede entrar en correlación con alguna función semiótica o conocimiento de la misma persona o de otra. Cuando ocurre eso, se tiene entonces una especie de composición de funciones semióticas o funciones de signo o de conocimientos. Para entender esto, podemos valernos de la metáfora de composición de funciones en matemática. Se puede ver aquí otra manera de concebir un aprendizaje: como la concordancia o correlación de funciones semióticas en una misma persona o entre personas, alrededor de un tema en particular. No se da un conocimiento cuando, los funtivos de una función semiótica que aparecen en un texto, no forman parte de los funtivos de las funciones semióticas de esa persona o de la otra persona que observa ese texto.

Para que haya conocimiento o concordancia entre funciones semióticas, debe haber en la mente de la persona, funciones semióticas cuyos planos de expresión y de contenido dispongan de elementos que subsuman los elementos de los planos de expresión y de contenido de la función semiótica original, y que de lugar a una nueva función semiótica, compuesta o resultante de las anteriores. Es decir, un conocimiento puede ser visto como una adecuación de signos, entre el que lo expresa o emite y el que lo traduce o recibe; y es también un signo.

CONCLUSIONES

Las nociones de entidades constitutivas de un problema y la de entidad relacional – asertiva, han dado paso a las de funciones de signo, funciones semiótica o signos; en la tarea de acercar un enfoque sobre los elementos que intervienen en la actividad matemática y en particular, en la concepción sobre la construcción de conocimiento matemático. *Vimos que la tarea de resolución de problemas implica la construcción de relaciones asertivas sobre entidades constitutivas de primer y segundo nivel*. Se considera que un conocimiento se constituye sobre otros conocimientos que son eventualmente de menor nivel (en términos de entidades constitutivas o relacionales). Postulamos luego, que un conocimiento puede ser considerado como una adecuación o concordancia o "composición" de entidades relacionales o funciones de signo, y es también un signo.

REFERENCIAS

Barrantes, H. La teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, Año 1, Nº 2. 2006

Castorina, J. A., E. Ferreiro, M. Kohl de Oliveira, & D. Lerner, *Piaget- Vigotsky: contribuciones para replantear el debate.* Paidós Educador. 1ª. Reimpresión. 1996

D'Amore B., Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *UNO*. Barcelona, España. 35, 90-106. 2004.

D'Amore, B. Una contribución al debate sobre conceptos y objetos *UNO, 27. 51-76 2001.*

Eco, U. *Tratado de Semiótica General.* Editorial Lumen. 2000

Ferdinand de Saussure. *Curso de Lingüística General.* Traducción, prólogo y notas de Amado Alonso. Vigésima cuarta edición editorial Losada Libera los libros. http://www.jacquesderrida.com.ar, junio 2013

Frege, G. Sobre sentido y referencia, En «Estudios sobre semántica» Editorial Orbis. Barcelona, 51-86. 1998

Ferrater Mora, J. *Diccionario de Filosofía*. Editorial Sudamericana. 5º Edición.

Godino, J. Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, *25*, *77-87.*1996

*G*odino J.D., Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. Universidad de Granada. Septiembre, http://www.ugr.es/local/jgodino, 2010

Godino J. D., C. Batanero, C. & V. Font, Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada de The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The Internacional Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 27-135.2009

Godino, J. D. & A. M Recio, Un modelo semiótico para el análisis de las Relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática. En A. Olivier y K. Newtead (eds.), *Proceedings of the 22 nd Conference of the International Group for he Psychology of Mathemnatics Education (Research Forum)*, Vol 3:1-8. University of Stellenbosch, South Africa. 1998

Godino, J. & C. Batanero, Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Ponencia presentada en el *IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM)* Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática. Guimaraes.1998(a).

Godino, J. & C. Batanero, El análisis del significado de los objetos matemáticos como área prioritaria de investigación en educación matemática. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity.* (pp.177-195). Dordrecht: Kluwer, A.P. 1998(b)

Godino, J. & C. Batanero, Una aproximación semiótica y antropológica a la investigación en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *10.* 1997.

Godino, J. *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos*. *UNO, 25*, 77-87. 1996.

Godino, A. Las operaciones aritméticas, los niños y la escuela. *Colección respuestas educativas*. Editorial Magisterio del Río de la Plata. 1996

Godino, J. Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de la matemática. *Quadrante,* 2(1), .9-22. 1993.

Godino, J. & C. Batanero, Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* Vol. 14,n°3: 325-355. 1994.

Hjelllllmslev L. *Prolegómenos a una teoría del Lenguaje.* Versión española de José Luis Díaz Liaño. Segunda edición. 1º reimpresión Editorial Gredos. 1980

Moreira, M. A, ¿Por qué conceptos?, ¿Por qué aprendizaje significativo? ¿Por qué actividades colaborativas? ¿Por qué mapas conceptuales? Revista *Qurriculum*, 23, 9-23.2010

Moreira, M. A. & D. M. Greca, Cambio conceptual: análisis crítico y propuestas a la luz de la teoría del aprendizaje significativo. *Ciencia y Educación*. V.9, nº 2, 301-315. .2003

Moreira, A. Lenguaje y aprendizaje significativo. *Conferencia de cierre del IV Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo,* Maragogi, AL,Brasil, 8 a 12 de septiembre de 2003. Versión revisada y ampliada de la participación del autor en la mesa redonda sobre Lenguaje y Cognición en el aula de Ciencias, realizada durante el II Encuentro Internacional Lenguaje, Cultura y Cognición, Belo Horizonte, MG, Brasil. Traducción Mª Luz Rodríguez Palmero.2003

Onrubia, J., M.J. Rochera, & E. Barbera, La enseñanza y El aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. *Desarrollo psicológico y educación.* Cap.19. Coll, C., Palacios, J. y Marchessi, A. (Compiladores) .487-508, 2001.

Piaget, J. & R. Garcia, *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* Editorial Siglo XXI. 1984.

Rodríguez Palmero, M. L. La teoría del aprendizaje significativo. En *Concept Maps: Theory,* Metodology, Technology. Proc. of the First Int. Conference on Concept Mapping. A. J. Cañas, J.D. Noval, F.M. González, Eds. Pamplons, España. 2004.

Ulmann, S. *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid. Aguilar, 1976

Vergnaud, G. Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo? *Colección Referencias Pedagógicas.* 1º Edición. 1994.

Vergnaud, G. La teoría de los campos conceptuales*. Recherches en Didáctique des Mathématiques,* Vol. 10,nº2,3, 133-170. 1990

Wittgenstein L. *Investigaciones filosóficas,* Editorial Atalaya 1999