IX Jornadas de Ciencia y Tecnología
de Facultades de Ingeniería del NOA
Santiago del Estero, 3 y 4 de Octubre de 2013

De los sentidos y el significado a la comprensión de la integral de una función

Dra. Ing. Olga Carabús[1], Ing. Oscar Salcedo[1], Lic. Mónica Argüello[1], Ing. Patricia Lobo[1]& Ing. Gustavo Serrano[1]

(1)Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCa.
olca@arnet.com.ar

RESUMEN: Se realiza una investigación didáctica sobre la comprensión de la integral de una función, a partir de su concepción como un proceso de dimensiones, epistemológica, cognitiva, didáctica y ontosemiótica. Se analizan los desempeños de los alumnos en situaciones problemas, se atienden *las representaciones ontosemióticas* y las dificultades o *conflictos ontosemióticos,* y se refuerza el tipo de práctica que conlleve a recuperar *el sentido* del concepto (geométrico, físico y químico). Se diferencia *el sentido* del *significado*, ya que el primero se construye en base a cada subsistema de prácticas que lo utiliza y, el significado matemático se construye en base a los diversos sentidos logrados.
Se correlacionan los conflictos semióticos relevados con los históricos de la construcción científica.
Y se concluye que comprender la integral de una función es ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones, sus relaciones con otros objetos del Cálculo y sus usos. La comprensión alcanzada es parcial y progresiva y tiene niveles. Las actividades curriculares propuestas permiten la emergencia del objeto matemático personal, esto es, la concepción que el alumno elabora, y para la cual se requiere la necesaria adecuación al significado institucional, a través de *la institucionalización del saber* matemático por parte del docente.

1. INTRODUCCIÓN

A partir de las dificultades en la conceptualización de la integral de una función del Cálculo Diferencial e Integral en las Carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Catamarca, se realiza una investigación didáctica sobre su comprensión (Carabús, 2007).
Las investigaciones didácticas muestran que no es fácil para los estudiantes entrar en el campo conceptual del Cálculo Diferencial e Integral, por la complejidad del proceso de su comprensión conceptual en sí mismo y por sus vinculaciones con otros procesos del hacer matemático, cuando se pretende el desarrollo de los modos de pensamiento y de las técnicas que están fundamentadas en él. Esta dificultad reconocida en la Universidad no es nada nueva y se evade a través de la algoritmización del Cálculo. Para la caracterización de este proceso, se trabaja con un modelo teórico multidimensional elaborado en base a las investigaciones realizadas en el estudio del Cálculo Diferencial e Integral, que permite la visualización y el control de los niveles de la comprensión como así también su movilización a través de los desempeños en las situaciones didácticas (Carabús, 2013). En este modelo teórico se sostiene que la comprensión de los conceptos tiene dimensiones, epistemológica, cognitiva y didáctica, tal como lo sostiene actualmente la Didáctica de la Matemática Fundamental de la Escuela Francesa (Brousseau, 1986a y 1986b) Se incorpora además otra dimensión, la ontosemiótica, integradora de las anteriores, que tiene que ver con los sentidos que el concepto adquiere en diversos campos y que permiten la construcción de su significado matemático. Se recoge la importante bibliografía del Enfoque Ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática (Godino, 2000, 2002 y 2003).
Se considera que el modelo teórico ideado puede ser visto como un modelo superador de los modelos simplificados, cognitivos o didácticos, que se han comprobado efectivamente.
El proceso de la comprensión de los conceptos del Cálculo admite en este modelo teórico restricciones o condicionantes, como lo discursivo y lo afectivo. Se estudia la comprensión de la integral de una función a partir de los desempeños de los alumnos, en la hipótesis

que tales desempeños dan cuentan del proceso inobservable de la conceptualización de tal objeto.
Además se propicia el aprendizaje de la comprensión a través de las prácticas operatorias y/o discursivas necesarias, y la comprensión de tal concepto se arma a partir de las comprensiones de conceptos previos y de la información dada en escenario institucional, de manera gradual y en un proceso que conlleva varios conflictos con desempeños anteriores e ideas asociadas a ellos.
Un presupuesto teórico del modelo es que la comprensión tiene niveles: 1) intuitivo u operatorio; 2) declarativo o comunicativo; 3) argumentativo o validativo y; 4) estructural o institucionalizado.
Esta categorización de la comprensión conceptual requiere de la organización de situaciones didácticas específicas para cada uno de los niveles. Y se ha dispuesto de las situaciones didácticas o dialécticas de Brousseau (situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización) las que se han correlacionado, una a una, con los niveles de la comprensión (Brousseau, 1987).

2. REFERENTE TEÓRICO

El estudio epistemológico, cognitivo y didáctico, se basa en los principios de la Didáctica de la Escuela Francesa en cuanto a la construcción del saber matemático. La consideración de la dimensión ontosemiótica en el proceso de la comprensión, se ha dicho, se sostiene en los estudios actuales del Enfoque Ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática de Díaz Godino, J. (2002 y 2003).
La mirada puesta en lo histórico epistemológico del Cálculo Integral da pistas de cómo facilitar su abordaje en el aula buscando la participación activa de alumno en la construcción del concepto *integral de una función*.
En el concepto de integral de una función están imbricadas dos nociones intuitivas, presentes en la vida diaria, y cercanas a experiencias vividas por los alumnos, el *resultado* de *cambios* y el *efecto total de cambios.*
Se reconstruye didácticamente el desarrollo histórico del Cálculo Integral y se parte de sumas. Se realiza esta tarea bajo la idea de *los efectos de cambios* para aludir a la relación existente ente el Cálculo Integral y Diferencial. La discusión está planteada sólo a las integrales de Riemann de funciones elementales que se consideran continuas o con un número finito de discontinuidades.
Se introduce primero la integral definida que se presenta como límite de una suma, interpretada geométricamente como área. Se buscan con diversos sistemas de prácticas operatorias y/o discursivas, los sentidos que tal concepto adquiere en los campos de donde provienen. Con los sentidos logrados se pretende la construcción del significado matemático del concepto, esto es, su *conceptualización*.
Se busca que el alumno sea un usuario eficiente de los métodos del Cálculo Diferencial e Integral como *la matemática de los cambios y los resultados de cambios* a través de la comprensión auténtica de los conceptos fundamentales y que no los pierda de vista en el manejo de los algoritmos que puede lograr después. Sólo así podrá garantizarse su utilidad en la resolución de numerosos problemas de las ciencias.
Existe actualmente un gran número de paquetes de cómputo que manejan las reglas de derivación e integración. Pero ninguna de esas herramientas numéricas, simbólicas y gráficas ofrece ayuda en el planteamiento de problemas, en la toma de decisiones sobre qué fórmula o cuál método se debe aplicar para modelar un cierto fenómeno de estudio. El alumno logra este objetivo cuando se apoya en cimientos conceptuales sólidos de las ideas fundamentales del Cálculo, como las ideas *de razón de cambio* y de *resultados acumulados de cambios*, potentes para la comprensión y, facilitadoras para el acceso a la "discretización" del Cálculo Diferencial e Integral como cálculo de diferencias y sumatorias que se prestan para que aplique la informática a estos métodos.

3. METODOLOGÍA

Para indagar sobre la comprensión de la integral de una función se aplica un instrumento con tres ítems, que se muestra en apartado 4. La población estudiada es la constituida por los alumnos de 1º Año de las Carreras de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca.
La metodología seguida en este trabajo corresponde a la de la Ingeniería Didáctica de la Didáctica de la Matemática Fundamental, que es una metodología cualitativa y se relaciona con la de estudio de casos.
Los tres ítems del instrumento aplicado se han construidos para estudiar los niveles de comprensión intuitivo, validativo y estructural, respectivamente a través de los desempeños de los alumnos en las situaciones didácticas diseñadas en cada uno de ellos.
El ítem A analiza la comprensión desde *el nivel intuitivo*. Y se requiere el abordaje de una *situación didáctica de acción* (teoría de las situaciones didácticas de Brousseau). La opción

correcta del ítem A-1 revela que sólo el 32% de los alumnos interrogados logra construir el sentido geométrico de la integral, esto es, la distancia que recorre el móvil en el tiempo que están registradas las distintas velocidades. La interpretación del cambio producido por la velocidad de un móvil en el tiempo como la distancia recorrida da el sentido geométrico de la integral en juego. Las opciones distractoras del ítem dan cuenta de *los conflictos semióticos* de los alumnos (Godino, 1994). La pérdida del sentido de la integral está registrada en la concepción de la integral como la velocidad, aceleración y tiempo respectivamente, siendo la más generalizada la de la aceleración.

El ítem A-2 indaga sobre el significado de la razón del cambio de la velocidad que es la aceleración del móvil en un intervalo de tiempo. La opción correcta es señalada sólo por el 34%. Las *concepciones o pseudos conceptos* elaborados por los alumnos son registrados en las otras opciones. Las concepciones más generalizadas son la de la identificación con la velocidad y la distancia.

En el ítem B se realiza el estudio de la comprensión de la integral en una transformación química, la variación de la temperatura de una sustancia que se calienta. Está orientado a relevar *el nivel validativo o argumentativo* de la comprensión a través del desempeño en una *situación didáctica de validación* (teoría de las situaciones didácticas de Brousseau) (Brousseau, 1987). En su primer apartado debe validar la integral que modeliza el problema planteado y es alcanzado por el 40% de los alumnos participantes. En su segundo apartado debe calcular el tiempo necesario para que la sustancia se derrita, lo se logra a los 95º de temperatura y es reconocido por un 51% de los estudiantes. En este ítem se estudia el cambio total de la temperatura de una sustancia que se está calentando durante un cierto tiempo. La integral es el resultado del cambio de temperatura en un tiempo dado.

El ítem C fue ideado para comprobar el *nivel estructural* de la comprensión de la integral de una función con una *situación didáctica de institucionalización*. En el primer apartado del ítem la opción correcta es seleccionada por un 48% de alumnos y permite el reconocimiento de que la distancia recorrida por el avión está dada por el área bajo la curva. El segundo apartado es similar al anterior pero referido al cambio operado en todo el tiempo de vuelo. Las respuestas correctas alcanzan el 48% también. El tercer apartado es abordado correctamente por el 86% de los alumnos y representa el *nivel estructural* de la comprensión de la integral de la función velocidad en función del tiempo.

4. INSTRUMENTO APLICADO

El instrumento aplicado es el siguiente:

Ítem A- La gráfica de la fig. 1fue construida a partir de los datos obtenidos del velocímetro de un autobús de pasajeros.

1- El área bajo la gráfica entre 12hs y 18hs mide:
a) la velocidad del vehículo entre 12hs y 18hs
b) la distancia que recorre el móvil entre las 12hs y 18hs
c) la aceleración del vehículo entre las 12hs y 18hs
d) el tiempo transcurrido entre las 12hs y 18 hs.

2- La pendiente de la hipotenusa del triángulo de base 12-13 mide:
a) la velocidad del vehículo entre 12hs y 13hs
b) la distancia que recorre el móvil entre las 12hs y 13hs
c) la aceleración del vehículo entre las 12hs y 13hs
d) el tiempo transcurrido entre las 12hs y 13 hs.

Ítem B- En un laboratorio que examina materiales se calienta una cierta sustancia. La temperatura varía según dT/dt = t^2 + 1 $\left[\frac{\circ C}{\min}\right]$. La temperatura inicial es de 20 ° C.

1- La temperatura de la sustancia después de 5 minutos está dada por:

a) $\int \frac{dT}{dt}dt = \int (t^2 + 1)dt = t + \frac{t^3}{3} + c$

b) t^2 + 1= 5^2 +1 = 26

c) 2t = 2.5 = 10

d) $$\int \frac{dT}{dt}dt = \int (t^2 + 1)dt = t + \frac{t^3}{3} + c = t + \frac{t^3}{3} + 20 = 66.7 \circ C$$
por ser T=20°C si t=0.

2- Si T = $t + \frac{t^3}{3} + 20$, esto es, la temperatura en función del tiempo y la sustancia se derrite al alcanzar una temperatura de 95°, el tiempo que tarda en derretirse es de:
a) 95
b) 20
c) 6
d) aproximadamente 6

Ítem C- La fig. 2 es la gráfica de un vuelo de avión, la velocidad en función del tiempo.

1- Físicamente el área de un rectángulo elemental del área bajo la curva corresponde:
a) velocidad del avión en ese intervalo
b) aceleración del avión en ese intervalo
c) distancia recorrida por el avión en ese tiempo

2- Físicamente el área total debajo de la curva representa:
a) velocidad del avión en todo el tiempo de vuelo
b) aceleración del avión en todo el tiempo de vuelo
c) distancia recorrida por el avión en todo el tiempo de vuelo
3-El resultado exacto para el área de bajo de la curva se determina con:
a) el cálculo de la derivada de la función que representa el vuelo
b) el diferencial de la función que representa el vuelo
c) la integral de la función que representa el vuelo
d) la integral definida de la función del vuelo entre los límites dados por el tiempo inicial y tiempo final.

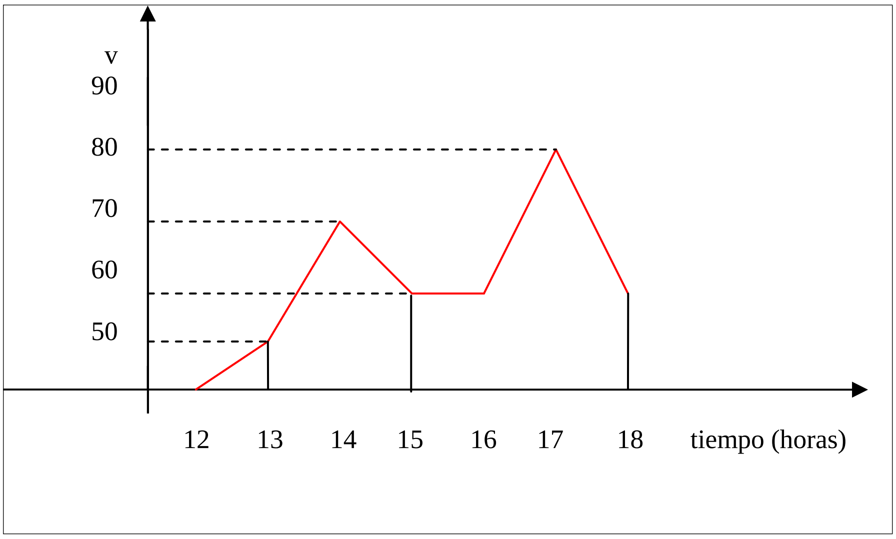

Figura 1. Gráfica del Ítem A del instrumento aplicado

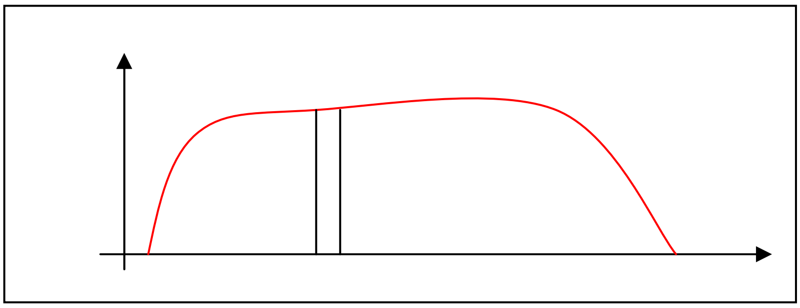

Figura 2. Gráfica del Ítem C del instrumento aplicado

5. CONCLUSIONES

La comprensión de la integral de una función se facilita con la intervención de los sentidos que este concepto adquiere en el campo geométrico, físico y químico. Esos sentidos permitirán la elaboración del *significado matemático del concepto* o sea su *conceptualización.*
Es lo que desde el punto de vista ontosemiótico se sostiene y se comprueba en este trabajo. Ante estas situaciones planteadas los alumnos deben hacerse las mismas preguntas que los científicos se hicieron en el siglo XVI, como, por ejemplo, si

un objeto se mueve con velocidad variable, ¿qué distancia recorre en un intervalo dado de tiempo?, si la temperatura de un cuerpo varía de una parte a otra, ¿cuál es la cantidad de calor presente en ese cuerpo?

Siempre que una magnitud varíe en forma continua (y muchos fenómenos naturales son de ese tipo) podemos recurrir al Cálculo Diferencial para calcular razones de cambio; y a partir de la razón de cambio, se puede, con los métodos del Cálculo Integral, encontrar la magnitud inicial. A través de esta práctica con las situaciones dadas el alumno aprecia que el Cálculo Integral es un método o técnica que permite encontrar las relaciones entre magnitudes que cambien según ciertas reglas. Así en la mecánica se pueden determinar distancias integrando velocidades, y velocidades integrando aceleraciones.

La identificación de la integración como proceso inverso de la derivación, que agiliza los cálculos, fue históricamente encontrada más tarde. Pero esto no privó a los padres del Cálculo, Newton y Leibniz, de lograr eficientes aplicaciones en distintos campos.

Según Euler, el Cálculo Integral constituía un método de búsqueda o técnica de estudio, dada la relación entre los diferenciales o la relación entre las propias cantidades. La operación con lo que esto se obtenía se denominaba ya *integración*. El concepto primario de tal Cálculo, por supuesto, era la integral indefinida. El propio Cálculo tenía el objetivo de elaborar métodos de búsqueda de las funciones primitivas para funciones de una clase lo más amplia posible.

Los logros principales en la construcción del Cálculo Integral inicialmente pertenecieron a J. Bernoulli y después a Euler, cuyo aporte fue inusitadamente grande. La integración llevada por este último hasta sus últimas consecuencias y las cuadraturas por él encontradas, todavía constituyen el marco de todos los cursos y tratados modernos sobre Cálculo Integral, cuyos textos actuales son sólo modificaciones de los tratados de Euler en lo relativo al lenguaje.

El Cálculo Integral jugó un papel importante en la creación de la teoría de funciones de variable compleja como una de sus fuentes. Además, dio comienzo a nuevas ramas como por ejemplo la teoría de las funciones especiales. De él se separaron y transformaron en campos matemáticos independientes: la teoría de ecuaciones diferenciales y el cálculo variacional. El Cálculo integral sirvió, finalmente, como una de las fuentes de la teoría de las funciones analíticas.

Este recorrido histórico epistemológico del Cálculo Integral nos ayuda a sostener, desde el inicio, el necesario proceso de *conceptualización* de sus objetos primeros, para facilitar las conceptualizaciones de los otros objetos matemáticos que emergen en los estudios del Cálculo de *funciones de dos o más variables reales* o de *variables complejas.*

Coincidiendo con Imaz y Moreno (2010), el análisis histórico epistemológico y las consiguientes investigaciones didácticas del Cálculo, son la brújula para las adecuaciones curriculares que busquen atender el proceso de la comprensión de sus objetos matemáticos. Concluimos que el alumno comprende la integral de una función cuando es capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, sus relaciones con los otros objetos del Cálculo y sus usos en todas las situaciones problemáticas prototípicas que son propuestas en el aula. Desde este punto de vista la comprensión alcanzada será parcial y progresiva y tendrá niveles como se ha trabajado con el instrumento aplicado. En él estaban propuestas actividades que tienen el objetivo, en el tiempo y con los medios disponibles, de lograr la emergencia del objeto matemático personal, esto es, la *concepción o pseudo concepto*, que el alumno elabora.

Éste es un proceso que se da en cada alumno de diferente forma y en el momento en que lo didáctico da lugar a lo *adidáctico* (apropiación del objeto matemático por parte del alumno). El alumno comprende sólo cuando desaparecen los artificios didácticos que ha puesto en juego el docente.

El docente, en *la institucionalización* del saber, debe establecer la necesaria adecuación del saber personal logrado con el saber institucional.

De la institucionalización, el docente tendrá claras pistas para la evaluación del proceso de la comprensión del alumno.

Finalmente, de este trabajo encuadrado en la concepción de la Didáctica de la Matemática actual, que se centra en el estudio y ayuda al estudio del Cálculo, se infieren claros indicios de cómo se mejora la comprensión de los objetos matemáticos a partir del uso de la técnica matemática, la tecnología de la misma técnica y la teoría de tal técnica. Este interjuego entre la técnica elegida, la tecnología de la técnica y la teoría de la técnica, que configuran el sistema didáctico elaborado para la experiencia, es lo que se ha ejecutado y ha logrado la construcción del *significado de la integral definida*, a partir de sus distintos sentidos, geométrico, físico y químico.

Y comprobamos que el papel que juega el alumno en el proceso de la comprensión es similar a la del matemático o investigador que para estudiar mejor sus saberes, recurre a diversas técnicas de estudio, la axiomatización es una de ellas, que en última instancia, es una técnica matemática o didáctica, que le ayuda a estudiar su saber.

6. REFERENCIAS

Brousseau, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp 33-115. 1986a.

Brousseau, G. *Hacia un nuevo "contrato didáctico" entre profesores y alumnos*. Conferencia dada el 30 de marzo de 1986 en la Universidad Pública de Navarra como profesor de la Universidad de Burdeos Francia. 1986b.

Brousseau, G. *Theory of didactical situactions in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P. 1987.

Carabús, O. *Ingenierías didácticas. La comprensión en la conceptualización del Cálculo*. SECYT. Universidad Nacional de Catamarca. 2007.

Carabús, O. *Didáctica del Cálculo. La comprensión de lo conceptual.* SECYT. Universidad Nacional de Catamarca. 2013.

Godino, J. y Batanero, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14 (3), pp 325-355. 1994.

Godino, J. Construcción de conocimientos matemáticos para el siglo *UNO, Revista de Didáctica de la Matemática*, Nº 25. Barcelona, España: GRAO. 2000.

Godino, J. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), pp 237-284. 2002.

Godino, J. Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática. Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Extraído en Granada, España, el 20 de de 2003 desde http://www.ugr.es/local/jgodino.

Imaz, C. y Moreno, L. *La génesis y la enseñanza del Cálculo: las trampas del rigor.* México: Trillas. 2010.