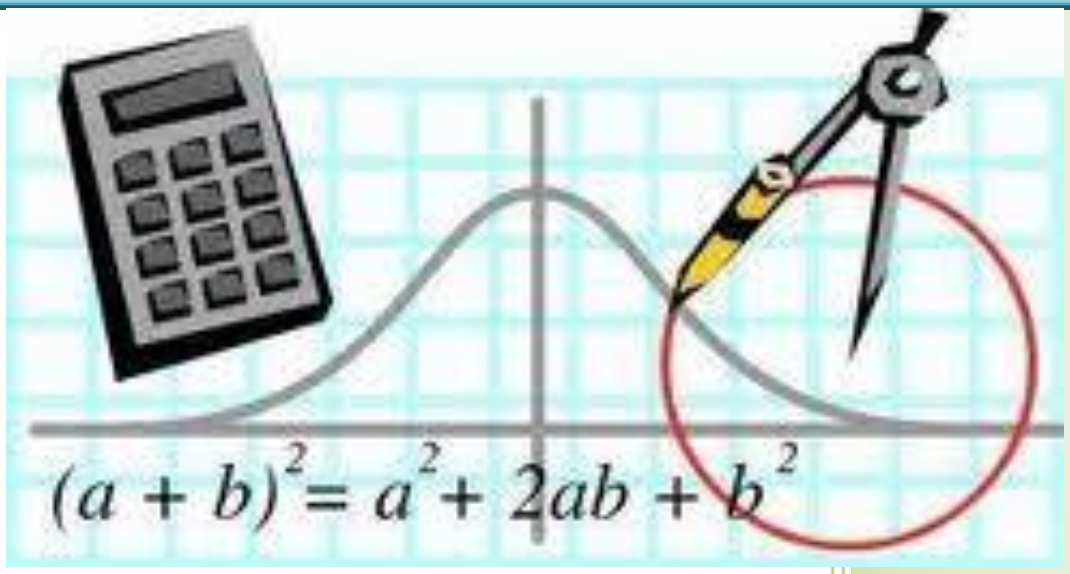
U.N.S.E.

FACULTAD DE CIENCIAS FORESTALES
Ing. Néstor René Ledesma

# GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA MATEMÁTICA




**Carreras:**

* Ingeniería Forestal
* Ingeniería en Industrias Forestales
* Licenciatura en Ecología y Conservación del Ambiente
*Técnico en Viveros y Plantaciones Forestales
*Técnico en Aserradero, Carpintería y Carpintería Industrial
*Técnico Fitosanitarista

**Docentes**:
Lic. Claudia Cejas
Lic. Carolina Ger
Lic. Noelia Ferreyra

## CONTENIDOS

***Unidad 1: El lenguaje formal de la matemática.***

*1.1.- Lectura e interpretación de textos matemáticos.*

***Unidad 2: Conjuntos numéricos.***

*2.1.- El conjunto de números reales.*

*2.2.- Radicación.*

***Unidad 3: Ecuaciones***

*3.1.- Ecuaciones de primer. Ecuación de la recta*

*3.2.- Ecuaciones de segundo grado. Función Cuadrática*

*3.3.- Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.*

***Unidad 4: Polinomios***

*4.1.- Definición y clasificación de Polinomios.*

*4.2.- Raíces de un polinomio.*

*4.3.-Operaciones con polinomios*

***Unidad 5. Razones trigonométricas***

*5.1- Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.*

*5.2- Resolución de triángulos rectángulos.*

*5.3.- Planteo y solución de problemas de índole práctico*

## Unidad 1: El Lenguaje Matemático

**Objetivos de la Unidad 1**

- **Identificar los distintos símbolos matemáticos**
- **Transferir expresiones de un lenguaje a otro**
- **Interpretar el lenguaje simbólico**

## GUÍA N° 1: EL LENGUAJE FORMAL DE LA MATEMATICA

### El Lenguaje Matemático

La matemática es una ciencia que tiene su propio lenguaje; el lenguaje matemático a través del cual se expresan propiedades, axiomas, teoremas, y hasta simples enunciados.
El *lenguaje simbólico formal* de las matemáticas sigue una serie de convenciones propias; los símbolos representan un concepto, una operación, una entidad matemática según ciertas reglas. Este lenguaje particular y específico, simplifica en algunos casos la comunicación y permite clarificar y designar de manera exacta, sus contenidos.

**¿A qué nos referimos cuando hablamos de lenguaje matemático?**

**Nos referimos a:**

1. **La simbología matemática:** signos o caracteres gráficos, que son como las "palabras" de un idioma. Éstas deben ser conocidas con el objeto de poder interpretar lo que se quiere decir con ellas. Cada uno de estos símbolos utilizados en matemática, son necesarios para la perfecta construcción de ideas, de manera que la sustitución de alguno de ellos por otro diferente, aunque sea gráficamente parecido, cambiaría totalmente el significado. Todas y cada una de las "palabras matemáticas" tienen un significado particular, no existiendo la posibilidad de sinónimos.

2. **La estructura y presentación de los contenidos matemáticos**: se realiza mediante enunciados con nombres o etiquetas (como por ejemplo: Definición, Teorema, Proposición, Lema, Demostración, Corolario, etc.), de manera que cada una de ellas predice su contenido. Así, todo enunciado o afirmación en matemática, debe ser presentado dentro de uno de estos epígrafes, ayudando así a una clara organización y estructura de los contenidos de la materia.

**Recordaremos a continuación algunos símbolos matemáticos que utilizaremos en la lectura y la escritura de éste lenguaje:**

| Símbolo | Significado |
|---|---|
| $\forall$ | Para todo |
| $\exists$ | Existe al menos uno |
| $\in$ | Pertenece a |
| $\notin$ | No pertenece a |
| $\subset$ | Está incluido en |
| $\not\subset$ | No está incluido |
| / | Tal que |
| $\wedge$ | Y |
| $\vee$ | O |
| ~ | no |
| $\mathbb{N}$ | Conjunto de números naturales |
| $\mathbb{Z}$ | Conjunto de números enteros |
| $\mathbb{Q}$ | Conjunto de números racionales |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto de números reales |
| Log | Logaritmo decimal |
| ln | Logaritmo neperiano |
| $\sum$ | Sumatoria |
| $\infty$ | Infinito |
| $\pi$ | Phi |
| $\cap$ | Intersección |
| $\cup$ | Unión |
| $\Rightarrow$ | Entonces |
| $\Leftrightarrow$ | Sí y sólo si |
| $\geq$ | Mayor o igual |
| $\leq$ | Menor o igual |

Para analizar estos símbolos consideremos el conjunto **A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}**

- Para indicar que un elemento **pertenece** al conjunto escribimos:

  $1 \in A$ **(**se lee: **1 pertenece al conjunto A)**

- Para indicar que un elemento **NO** pertenece al conjunto escribimos

  $9 \notin A$ **(**se lee: **9 no pertenece al conjunto A)**

- **El símbolo "$\exists$"** Se utiliza para expresar la existencia de **al menos** un elemento que cumple una condición o propiedad.

Se lee **"existe al menos".**

Para representar que en el conjunto **A existen** elementos que son múltiplos de 2, se escribiría: $\exists x \in A / x = \dot{2}$

Se lee: **"existe al menos** un elemento **x** que pertenece al conjunto **A** tal que x es múltiplo de 2"

- **El símbolo "** $\forall$ **"** Se utiliza para expresar que una propiedad o condición es cierta **para todo** elemento del conjunto.

Para representar que en el conjunto **A todos** los elementos del conjunto son números naturales, menores e iguales que 8, se escribe:

$$A = \{x / x \in N \wedge x \leq 8\}$$

Se lee: "El conjunto A está formado por todos los x, tal que x es un número natural menor e igual que 8".

- El símbolo **"** $\Rightarrow$ **"** es un conectivo lógico de Implicación que se lee **"entonces"**

$$a \in \mathbb{N} \Rightarrow -a \in \mathbb{Z}$$

Se lee: "Si **a** pertenece al conjunto de los números naturales **entonces -a** pertenece al conjunto de los numeres enteros.

- El símbolo **"** $\Leftrightarrow$ **"** es un conectivo lógico de doble Implicación que se lee **" si y sólo si"**

$$a \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a \in \mathbb{Z} \wedge a > 0)$$

Se lee: "**a** pertenece a los números naturales **si y sólo** si **a** pertenece a los números enteros y **a** es mayor que **cero**".

## Lenguaje Matemático

Existen tres grandes categorías en el lenguaje matemático: el lenguaje coloquial, el lenguaje simbólico y el lenguaje gráfico. El lenguaje coloquial se utiliza para expresar ideas y conceptos en forma escrita u oral usando el lenguaje ordinario. El lenguaje simbólico se utiliza para expresar con símbolos en forma precisa los conceptos dados en lenguaje coloquial. El lenguaje gráfico se utiliza para representar conceptos y situaciones.

| Lenguaje Coloquial | Lenguaje Simbólico |
|---|---|
| Un número | X |
| El duplo, el doble de un número | 2X |
| La mitad de un número | $\frac{X}{2}$ |
| el anterior de un número | X-1 |
| El sucesor o el siguiente de un número | X+1 |
| El opuesto de un número | - X |
| Un número par | 2X |
| Un número impar | 2X+1 |
| El triple de un número | 3X |
| El cuádruplo de un número | 4X |
| La tercera parte, el tercio de un número | $\frac{X}{3}$ |
| El cuadrado de un número | $X^2$ |
| El cubo de un número | $X^3$ |
| El cuadrado del siguiente de un número | $(X+1)^2$ |
| El cubo del siguiente de un número | $(X+1)^3$ |



**Actividades**

**1.** Escriba la expresión simbólica correspondiente a cada expresión coloquial:

**a.** El doble de un número, más su siguiente, es 4.
**b.** El doble de un número, aumentado en 3 unidades, es 4.
**c.** El doble de: un número aumentado en 3 unidades, es 4.
**d.** El triple de un número, disminuido en 7 unidades, es igual a 20.
**e.** El doble del siguiente de un número es 18.
**f.** La mitad de un número aumentada en 6 unidades es igual a 14.
**g.** El cuadrado de la diferencia entre un número y 3.
**h.** La tercera parte de la suma entre un número y su consecutivo.
**i.** La diferencia entre el cuadrado de un número y el cuadrado de su anterior es mayor que 10.
**j.** La raíz cuadrada de la suma entre un número y 9 es igual a 5.

**2.** Exprese en lenguaje coloquial cada expresión.

**a.** $2(x + 5) = 24$
**b.** $3x - (x + 1)$
**c.** $x^2 - y^2 > 15$
**d.** $\sqrt{(x + 4)} = 6$
**e.** $3(x-1)= x^2$

**3.** Plantee y resuelva los siguientes problema.

**a)** Durante un período de gestión, una empresa forestal registró pérdidas totales de **$500.000**, debido al mantenimiento y reforestación de un predio afectado por incendios. Si las pérdidas fueron constantes de **$25.000 por año**, ¿cuántos años duró el proceso de recuperación del bosque?

**b)** Durante una campaña de monitoreo aéreo de un bosque, un equipo de ingenieros forestales utiliza un dron equipado con sensores para medir la altitud y capturar imágenes del dosel arbóreo. En el tablero de control, se enciende una luz de advertencia cada vez que el dron desciende una cierta cantidad de metros de altitud.
Después de completar un vuelo de reconocimiento, el dron descendió 3000 metros en total, y la luz de advertencia se encendió 5 veces. ¿Cada cuántos metros de altitud desciende el dron cuando se enciende la luz de advertencia?

**c)** Un vivero forestal dispone de 1.260 plantines para distribuir en 7 sectores con igual cantidad. ¿Cuántos plantines se colocarán en cada sector? Escriba primero la expresión matemática que representa la situación.

**d)** En una jornada de reforestación se plantan x árboles por la mañana y el doble de esa cantidad por la tarde. Exprese simbólicamente la cantidad total de árboles plantados. Si en total se plantaron 450, determine x.

**e)** Un depósito posee x bolsas de sustrato. Recibe 35 bolsas y luego utiliza 18. Exprese simbólicamente la cantidad final. ¿Cuántas quedan si inicialmente había 72?

**f)** Una parcela cuadrada tiene lado x metros. Exprese simbólicamente su perímetro y su área. Si el lado aumenta 2 m, escriba las nuevas expresiones.

**g)** Durante un monitoreo, un dron parte de una altura de 120 m, asciende x metros y luego desciende 35 m. Exprese su altura final. Si termina a 145 m, determine x.

**h)** Un aserradero produce 48 tablas por lote. Si debe completar un pedido de 1.150 tablas, ¿cuántos lotes completos necesita producir como mínimo? ¿Cuántas tablas sobrarán?

**i)** En una reserva, 3/5 de los visitantes realizan un sendero interpretativo. Si 168 visitantes no lo realizan, ¿cuántas personas ingresaron en total?

**j)** Para cubrir un cantero rectangular de 6 m por 4,5 m se utilizan placas cuadradas de 50 cm de lado. ¿Cuántas placas se necesitan si no se consideran pérdidas por cortes?

**k)** La raíz cuadrada del consecutivo de un número natural es igual al producto entre la raíz cuadrada de 50 y la raíz cuadrada de 2. ¿Cuál es ese número?

**l)** Una caja contiene 8 paquetes y cada paquete, 6 alfajores. Para darle un alfajor a cada uno de los 754 chicos que participan en un certamen, ¿cuántas de estas cajas hay que comprar? ¿Sobran alfajores después del reparto?

**m)** En un tren ecológico que recorre una reserva forestal, los **4/7** de los pasajeros son turistas extranjeros que visitan el bosque para observar especies nativas. Se sabe que hay 72 pasajeros argentinos. Los pasajeros extranjeros ocupan **las 3/8 partes** de los asientos del tren. ¿Cuántos asientos tiene el tren ecológico?

**n)** En una escuela han organizado una campaña de invierno de confección de frazadas a partir de cuadrados de lana de 20 cm por 20 cm. Si desean hacer frazadas que midan 2 metros de largo y 1 metro 60 cm de ancho:

1. ¿Cuántos cuadrados de lana se necesitan para una frazada?
2. Si logran reunir 1.000 cuadrados de lana ¿cuántas frazadas se pueden confeccionar?
3. ¿Sobran cuadrados?

**4.** Expresa simbólicamente:

| | |
|---|---|
| **a)** El doble de un número a | |
| **b)** Un número **m**, mas su doble, más su mitad. | |
| **c)** El triple del resultado de sumar cinco a un número p | |
| **d)** El siguiente de un número b sumado al doble de b. | |
| **e)** La mitad del siguiente de un número b. | |

| | |
|---|---|
| **f)** La edad de un Juan dentro de 20 años | |
| **g)** La edad que tenía Marisa hace 10 años | |

**5.** Complete la tabla a partir de los enunciados.

**a)** Marcela tiene x años.
**b)** Su hija tiene 27 años menos que ella.
**c)** Su madre tiene el doble de la edad de ella.
**d)** Su padre tiene 4 años más que su madre.
**e)** Marcela tenía 5 años cuando nació su hermano Federico.
**f)** La edad de Marcela dentro de 12 años y la que tenía hace 8 años.

| **Marcela** | **X** |
|---|---|
| **La hija** | |
| **La madre** | |
| **El padre** | |
| **Federico** | |

## Unidad 2: Conjuntos numéricos

### 2.1 El conjunto de números naturales.

El conjunto de números naturales constituye el primer conjunto numérico creado por el hombre. Se lo simboliza

$N = \{1,2,3,4,5,....\}$

Si queremos considerar este conjunto unido al cero, lo indicamos de la siguiente manera:

$N_0 = \{0,1,2,3,4,5,....\}$

**Caracterización del conjunto N.**



- **N**. Es un conjunto infinito.
- Tiene primer elemento: el 1
- **N** no tiene último elemento.
- El conjunto de números naturales es un conjunto discreto.

(Entre dos números naturales existe un número finito de números naturales)

En el conjunto N están definidas dos operaciones básicas. La suma y el producto. Estos es:

- **Suma** $\forall a, \forall b \in N : a + b \in N$

  Ejemplo: 3+5= $8 \in N$
- **Producto** $\forall a, \forall b \in N : a.b \in N$

  Ejemplo: 3.5= $15 \in N$

Sabemos que en el conjunto **N** la sustracción b-a sólo es posible si b > a.

*Lo ejemplificamos:*

6+x =10 entonces

x =10-6, de donde x=4. Esta ecuación tiene solución pues 10 > 6

Pero en la ecuación 6+x = 6 se tiene que

x = 6-6, de donde x=0 pero $0 \notin N$

Esta ecuación tienen solución en el conjunto $N_0$

Luego en la ecuación 10+ x = 4 de donde

X = 4 -10 No tiene solución pues 4 < 10

A partir de los ejemplos observamos que se verifica lo siguiente:

- Si b > a, el resultado es un número natural.
- Si b=a, el resultado es cero.
- Si b < a, la ecuación no tiene solución en $N_0$

Para resolver el último tipo de ecuaciones, se advierte la necesidad de ampliar el campo de números naturales.

Se crean así los números enteros negativos.

Así la última ecuación se resuelve de la siguiente manera:

$10 + x = 4 \Rightarrow x = 4-10 \Rightarrow x=-6$

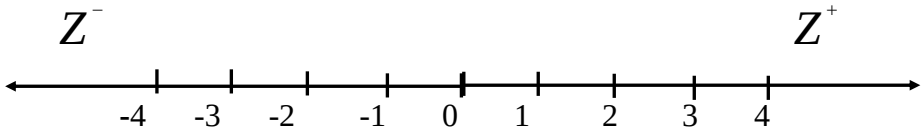
El conjunto numérico que contiene estos tipos de números se llama conjunto de los números enteros negativos y se los identifica con $\mathbf{Z}^-$.

## El conjunto de los números enteros.

El conjunto de los números enteros, que identificaremos con **Z**, se define como la unión de los Números Naturales (o Enteros positivos), los números enteros negativos y el cero.

Simbólicamente: $Z = Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$

### Los números enteros en la recta numérica.




Para representar números enteros en la recta, tomamos una unidad que nos permitirá graduar dicha recta y representamos los números positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda del cero.

### Caracterización del conjunto Z

- No tiene primero ni último elemento.
- Todo número entero tiene sucesor y antecesor
- **Z** es un conjunto discreto

(Entre dos números enteros hay un número finito de números enteros)

En el conjunto **Z** están ahora definidas tres operaciones básicas. La suma, la resta y el producto. Estos es:

- **Suma** $\forall a, \forall b \in N : a + b \in Z$
  Ejemplo: 2+5= $\in Z$
- **Producto** $\forall a, \forall b \in N : a.b \in Z$
  Ejemplo: 2.5= $10 \in Z$
- **Resta** $\forall a, \forall b \in N : a - b \in Z$
  Ejemplo: 2-5= $-3 \in Z$

## El conjunto de números racionales.

En el conjunto de los números enteros estudiamos que las ecuaciones de la forma a.x=b sólo tienen solución si b es múltiplo de a y $a \neq 0$

Tomemos por ejemplo:

- 4.x=12 $\Rightarrow$ x=12:4 y x=3 ,

- 4.x= 4 $\Rightarrow$ x=4:4 y x=1,
- Si 5.x= 8 vemos que no existe ningún número entero que permita que tal igualdad se verifique.

Problemas como éste dieron lugar a la necesidad de ampliar el conjunto numérico con la consideración de los números fraccionarios (**F**)

Si unimos el conjunto de los números fraccionarios **F** al conjunto **Z** ya conocido, obtendremos el conjunto de números racionales que identificaremos con **Q.**

Simbólicamente: **Q = Z U F**

***¿Qué es un número racional?***

**Número racional** es todo aquel que se puede expresar como la razón de dos números a y b, siendo a $\in$ **Z** y b $\in$ **Z-{0}**.

Simbólicamente:

$$Q=\left\{\frac{a}{b}/\, a,b\in Z\wedge b\neq 0\right\}$$

Ejemplos: $-\frac{2}{3}\in$ **Q**; $\frac{1}{4}\in$ **Q,** $\frac{12}{4}=3\in$ **Q,** $-\frac{5}{5}=-1\in$ **Q**

**Caracterización del conjunto Q:**

- El conjunto **Q** es un conjunto infinito.
- No tiene primero ni último elemento.
- **Q** es un conjunto ***denso***. Esto significa que entre dos números racionales existe un número infinito de números racionales. Esta propiedad nos permite hallar una fracción entre dos fracciones según lo siguiente: *Si* $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

**Operaciones definidas en Q**

1) **Adición:**

Consideraremos los siguientes casos los que expresaremos en forma simbólica:

***1.*** De igual denominador: $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}$

***2.*** De distinto denominador: $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{an+bm}{mn}$

2) **Sustracción:**

Para restar dos números racionales, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)$$

3) **Producto o Multiplicación:**

Se llama producto de números racionales a todo número racional cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores de los factores.

Simbólicamente: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$

**Para pensar y responder:**

- ¿Porqué el cero no tiene inverso multiplicativo?
- ¿Todos los racionales tienen inverso aditivo?
- ¿Cuál es el elemento neutro para la adición y para la multiplicación?

**4) Cociente o división:**

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$ , el cociente $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ es otro número racional $\frac{m}{n}$ tal que: $\frac{m}{n}=\frac{a.d}{b.c}$



**Actividades**

**1)** Insertar el símbolo de <, =, ó > según corresponda a cada par de números y represéntelos en la recta real.

**a)** $\frac{-1}{2}.....\frac{5}{4}$ **a)** $\frac{-7}{6}.....\frac{-6}{5}$ **b)** $\frac{8}{5}.....\frac{3}{5}$ **c)** –104..... 2

**2)** Indicar las operaciones principales y luego resolver**:**

$a)\ \frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\right)=$ $b)\ \frac{2}{3}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{2}=$ $c)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}.\frac{5}{7}=$

$d)\ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{2}=$ $e)\ \frac{1}{2}-\frac{3}{4}\left(\frac{-5}{7}\right)=$ $f)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right).\frac{5}{7}=$

**Números irracionales**

Los números que no pueden expresarse como la razón de otros dos números, forman el conjunto de los números irracionales. Representamos este conjunto con la letra **I.** Los números irracionales son aquellos que pueden escribirse como una expresión decimal de infinitas cifras decimales no periódicos.

Por ejemplo:

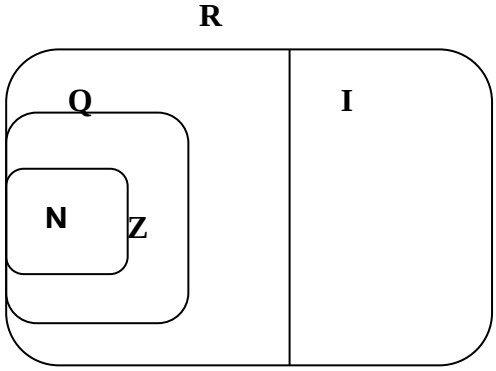
$\sqrt{2}$ = 1,4142...

$\pi$= 3,141592653589.....

***Números Reales***

El conjunto de los números Reales se obtiene partir de la unión de los números racionales con los irracionales. Lo designamos con la letra ***R***.

**Sintetizando:**




**Recordemos:**

- Los números reales cubren toda la recta.
- A todo número real corresponde un punto de la recta numérica.
- Todo punto de la recta representa un número real.

***Operaciones y propiedades en el conjunto de los números reales.***

En el conjunto R, como ya se mencionó, se definen dos operaciones básicas, la adición (+) y la multiplicación (.); estas cumplen, entre otras, las siguientes propiedades:

| **Propiedad** | **Expresión simbólica** | **Ejemplo Numérico** |
|---|---|---|
| **Ley de cierre** | $\forall a,b \in R : a+b \in R$<br>$\forall a,b \in R : a \cdot b \in R$ | **2+11=13** $\in R$<br>**2.11=22** $\in R$ |
| **Conmutativa** | $\forall a,b \in R : a+b = b+a$<br>$\forall a,b \in R : a.b = b.a$ | **3+4=4+3**<br>**12.3=3.12** |
| **Asociativa** | $\forall a,b,c \in R : (a+b)+c = a+(b+c)$<br>$\forall a,b,c \in R : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ | **(8+3)+2=8+(3+2)**<br>**(-2.6).3=(-2).(6.3)** |
| **Distributiva producto con respecto a la suma** | $\forall a,b,c \in R : a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ | **6.(1+3)=6.1+6.3**<br>**6.4=6+18**<br>**24=24** |
| **Existencia de elemento neutro** | $\exists 0 \in R / \forall a \in R : a+0 = a$<br>$\exists 1 \in R / \forall a \in R : a.1 = a$ | **-5+0=-5**<br>**7.1=7** |
| **Existencia de elemento Inverso** | $\forall a \in R, \exists ! -a \in R / a+(-a) = 0$<br>$\forall a \in R - \{0\}, \exists ! a^{-1} \in R / a \cdot a^{-1} = 1$ | **3+(-3)=0**<br>$9 \cdot \frac{1}{9} = 1$ |



**Actividades**

**1) Clasifique cada número en el conjunto más pequeño al que pertenece: N, Z, Q, I o R.**

**a.** -12
**b.** 0
**c.** 7/4
**d.** √81
**e.** √7
**f.** -3,25
**g.** 0,333…
**h.** π

## Potenciación

Si a $\in$ **R** y n $\in$**N**, se define la potencia n-esima de um número a como el produto de n veces el numero a, esto es:

$$a^n = \underbrace{a..a.a....a}_{n \quad veces}$$

Donde: "a" recibe el nombre de **base**
"n" recibe el nombre de **exponente**

**Propiedades.**

Si a $\in$ **R** y n $\in$**N**, definimos:

- Para a $\neq 0$, $a^0 = 1$
- $a^1$=a
- $a^n$= a.a….a si n $\geq$ 2

**Potencia de base racional y exponente negativo.**

Para a $\in$ **Q**, siendo a$\neq 0$ y n $\in$**Z** , definimos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

**Propiedades**

- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ La potencia *–n* de una fracción distinta de cero es igual a la potencia de exponente *n* del inverso de dicha fracción. Siendo n$\in$N y a$\neq$0
- $\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n.\left(\frac{c}{d}\right)^n$ La potenciación es distributiva respecto de la multiplicación.
- $\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n:\left(\frac{c}{d}\right)^n$ . La potenciación es distributiva respecto de la división.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n.\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+p}$ El producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes dados.

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-p}$ El cociente de potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual a la resta de los exponentes dados.
- $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{n.p}$ La potencia de otra potencia es igual a otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual al producto de los exponentes dados.
- La potenciación **NO** es distributiva respecto a la suma ni a la resta.



**Actividades**

**3)** Resolver

a) $-3^3\left(4-5\bullet 2^3\right)^2$

b) $5^2-\left[7^2+6^3-5^4\left(2-9^0\right)\right]$

c) $6(1-70)\left[-3^2\left(4^3-8^2\right)\right]$

d) $\left(-6+3^2\right)(24-17)$

e) $\left\{-12+8\left[6-4(3-7)\right]\right\}(6-5)$

f) $\left[(8+4)\div(-5+3)\left[(12--3)\div(6+-1)\right]\right]$

g) $19-23(5-7)-\left\{\left[3-(8+-5)-2\right]-\left[-9-3(2-5)\right]\right\}$

h) $-2\left\{\left[-40\div(-25+4--1)\right]\div\left[26\div(13--13)\right]\right\}$

i) $\left\{36+\left[-(-7+-8+4)\right]\right\}\left\{-\left[(3--2)+(8-4)\right]\right\}$

j) $\left[2-3^0\left(-2^2\div 2\right)^2(5-6)^8-(3)^2\right]^2$

k) $\left(2^3--2^4\right)+-2(-4--15)$

l) $(-6+-5-7+4)-(15-22+4)$

m) $-2\left[12\div(39-3)\right]$

n) $\left[(3+-2)^0+(4-3)^2\right].4+2^4$

o) $\left[-2(-5--7+11-17)\right]\left[-5(23+-28-4+6-3)\right]$

p) $\left[4(9-6)^3+2\right]-8$

q) $4\left\{\left[-(50+-5)\div 3\right]+6\right\}\left[(-4+-3+1)\div 3\right]$

r) $-80\left[-2(-18+3)\right]$

s) $\left[(17-15)^4+(2-3)^2-(1-2)^3\right]$

t) $\left\{\left[(4\div 2)^2(6-5)^3\right]\right\}$

u) $-\left[(128\div -8)\div(-14-2)\right]$

v) $\left[(1+4)^2-(-4)^2(10-9)^3\right]^2$

w) $-8\left\{-4\left[(100\div 25)--8\right]\right\}$

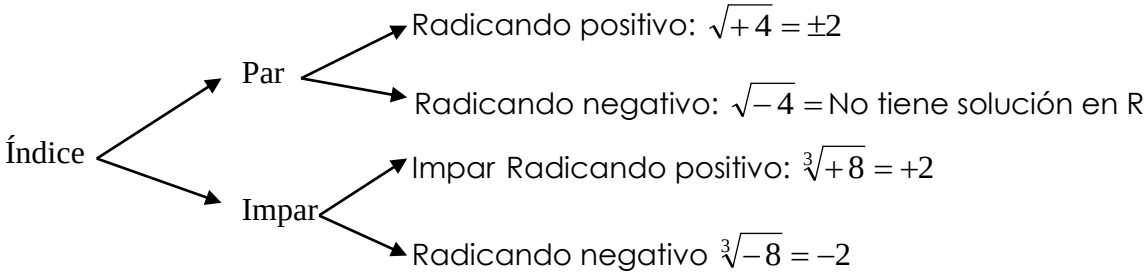
## Radicación

La raíz enésima de un número *a* es otro número *b* que elevado a la potencia *n*, *donde n* ∈ N, da por resultado el número *a*. esto es:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Donde: "a" recibe el nombre de radicando
"n" recibe el nombre de índice

**Regla de los signos**




**Propiedades de la radicación**

1. La radicación es distributiva con respecto al producto $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
2. La radicación es distributiva con respecto al cociente $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$
3. *Raíz de otra raíz* $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
4. Si el índice y el exponente de un radical de radicando positivo se multiplica o divide por un mismo número, la raíz no varía. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:b]{a^{m:b}}$
5. Si p y q son números naturales y a es un número real positivo se define:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

**Simplificación de radicales**

Simplificar un radical quiere decir eliminar factores del radical hasta que el radicando contenga sólo exponente igual o menor que el índice del radical y el índice sea tan pequeño como sea posible.
Algunas propiedades que resultan útiles para la simplificación son:

**Multiplicación o división del índice y el exponente por un mismo número natural**.

Si el índice y el exponente de un radical de radicando positivo (*), se multiplican o dividen por un mismo número natural, la raíz no varía.

| | |
|---|---|
| $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n.s]{a^{r.s}}$ | $\sqrt{4} = \sqrt[2.3]{4^{1.3}} = \sqrt[6]{64} = 2$ |
| $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n\div s]{a^{r\div s}}$ | $\sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6:2]{8^{2:2}} = \sqrt[3]{8} = 2$ |

(*) veremos un contraejemplo para demostrar que la propiedad no siempre es válida para radicales de radicando negativo.
Ejemplo

$$\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Si dividimos el índice y el exponente, resulta:

$\sqrt[6:2]{(-8)^{2:2}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ que no coincide con el resultado anterior.

En consecuencia:

**No siempre es posible simplificar un radical de radicando negativo.**
Al respecto debemos recordar:

Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

En particular: $\sqrt{a^2} = |a|$

**Extracción de factores del radical**.
Cuando el exponente del radicando es mayor o igual que el índice, se puede simplificar el radical extrayendo factores.
Ejemplo.

Consideremos $\sqrt{8}$ Podemos expresar a 8 como una potencia $\sqrt{2^3}$

Aquí no podemos simplificar índice y exponente por un mismo número, pero podemos descomponer al radicando como un producto de potencias de igual base de modo que:

I. El exponente de una de ellas sea múltiplo del índice.
II. El otro exponente sea menor que el índice.

Así $\sqrt{8} = \sqrt{2^2.2}$

distribuyendo $\sqrt{8} = \sqrt{2^2}.\sqrt{2}$

simplificando $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

- ✓ Todos los exponentes del radicando son menores que el índice.
- ✓ El radical ha quedado simplificado.

Otros ejemplos (todas las letras denotan números reales positivos):

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\sqrt[12]{27a^6x^3}$ c) $\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b}$

Solución

a)

$$\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{4^3}$$
$$= \sqrt[3]{4}$$

b)

$$\sqrt[12]{27a^6x^3} = \sqrt[12]{3^3a^6x^3}$$
$$= \sqrt[4]{3a^2x}$$

c)

$$\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b} = \sqrt{3a^2b^3 \cdot 2 \cdot 3a^5b}$$
$$= \sqrt{(3^2 a^6 b^4)(2a)}$$
$$= \sqrt{(3a^3b^2)^2(2a)}$$
$$= \sqrt{(3a^3b^2)^2}\sqrt{2a}$$
$$= 3a^3b^2\sqrt{2a}$$

**Racionalización del denominador**

En la división de números reales se plantea el problema de la división cuando el divisor o denominador es un número *irracional*, por ejemplo $3/\sqrt{5}$ .

Puesto que en el conjunto de los números racionales está definida la división cuando el denominador es un número racional, para resolver este problema, bastará entonces con transformar el divisor irracional en un número racional.

Esta operación se conoce con el nombre de *racionalización del divisor o denominador*.

Consideremos los siguientes casos:

**I. El denominador irracional es un radical.**

Ejemplo $\frac{3}{\sqrt{5}}$ → Divisor irracional

Para transformar el divisor en un número racional debemos multiplicar tanto dividendo como divisor por un mismo número.

En este caso conviene multiplicar por el radical $\sqrt{5}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

divisor irracional — divisor racional

Otras elecciones de denominador radical.

| Factor en el denominador | Multiplicar numerador y denominador por | Factor resultante |
|---|---|---|
| $\sqrt{a}$ | $\sqrt{a}$ | $\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$ |
| $\sqrt[3]{a}$ | $\sqrt[3]{a^2}$ | $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$ |
| $\sqrt[7]{a^3}$ | $\sqrt[7]{a^4}$ | $\sqrt[7]{a^3}\sqrt[7]{a^4} = \sqrt[7]{a^7} = a$ |

Otro ejemplo $\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}}$

Solución

$$\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}}\frac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$$

**Definición de potencias con exponentes racionales**

Sea $\frac{m}{n}$ un numero racional, donde *n* es un entero positivo mayor de 1. Si *a* es un número real tal que existe $\sqrt[n]{a}$ , entonces:

I. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

II. $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

III. $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$

Nota: Todas las propiedades de la potenciación de exponente entero se extienden a la potenciación de exponente racional.

## Adición y sustracción de radicales

**Radicales semejantes:** los radicales que tienen el mismo índice y el mismo radicando se llaman radicales semejantes.

Ejemplo 1:

a) $3\sqrt{2}$ y $5\sqrt{2}$ b) $-4\sqrt[3]{b^2}$ y $7\sqrt[3]{b^2}$

Solamente pueden *sumarse (o restarse)* dos o más radicales, cuando son radicales semejantes.

Ejemplo 2:

a) $3\sqrt{2}+\frac{5}{4}\sqrt{2}=\left(3+\frac{5}{4}\right)\sqrt{2}=\frac{17}{4}\sqrt{2}$

b) $\sqrt{18}+\sqrt{50}+\sqrt{72}=\sqrt{9.2}+\sqrt{25.2}+\sqrt{36.2}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

## Propiedades de los radicales

- **Producto de radicales del mismo índice**

Para multiplicar radicales con el mismo índice *se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice*.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$$

- **Producto de radicales de distinto índice**

Primero se reducen a índice común *y luego se multiplican.*

- **Cociente de radicales del mismo índice**

Para dividir radicales con el mismo índice *se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.*

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

- **Cociente de radicales de distinto índice**

*Primero se* reducen a índice común *y luego se dividen.*



**Actividades**

1) Resuelve:

a) $\sqrt{36} + \sqrt[3]{8} - 5^2 + \sqrt{100} + (-3)^3 =$

b) $\sqrt[5]{25+7} + \sqrt{81} - 4^2 + \sqrt{9} =$

c) $\sqrt{2.8} - \sqrt[3]{40:5} + \sqrt{5}.\sqrt{5} =$

d) $(10:5)^4 + (9:3)^2 - \sqrt{32.2} =$

e) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2 . \frac{3}{5} : \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right] . (-1)^2 =$

f) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \frac{1}{9}\right] . \left(2 + \frac{1}{3}\right)^0 =$

g) $\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - \sqrt[3]{-\frac{1}{4}} . \sqrt[3]{\frac{1}{2}} + (-1)^5}{\sqrt{9+4}} =$

h) $\frac{\sqrt{2^3} . \sqrt[3]{2^5}}{\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^{\frac{1}{2}}} =$

i) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2} - \sqrt[3]{\sqrt{4^3}} + \left[(-2)^7 : (-2)^5 . (-2)\right] =$

j) $\frac{7^{\frac{1}{2}} . 7^{\frac{1}{3}} . 7^{\frac{4}{6}}}{7^{\frac{2}{5}} . 7^{\frac{2}{3}}} =$

k) $\frac{1}{2} - \sqrt{1 - \frac{16}{25}} - \frac{1}{2} : \left(\frac{-1}{3}\right)$

l) $\frac{1}{2} - \left[\sqrt{1 - \frac{16}{25}} - \frac{1}{2}\right] : \left(-\frac{1}{3}\right)$

**3)**-*Resolver aplicando la propiedad correspondiente, indica que propiedad usaron en cada ejercicio*:

a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ b) $\sqrt{4.25}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

d) $\sqrt[4]{80} : \sqrt[4]{5}$ e) $\sqrt[5]{27^5}$ f) $\sqrt[10]{32^2}$

**4)** *Resolver las siguientes operaciones combinadas*

a) $\frac{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{17}{50}}}{\frac{1}{5}} + \left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)$

b) $3\sqrt{\frac{1}{9}.2 + \frac{2}{9}.\frac{1}{3}} + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 - \sqrt[4]{81^{-1}}$

c) $\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{6}{10}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3}}{\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{2}}-1}$ d) $\dfrac{\left[\left(\sqrt{0,09}+\frac{1}{2}+0,7\right)^2-\left(0,7+\frac{1}{5}\right)^2\right]}{\frac{2}{3}-\sqrt{0,25}}$

Indicar que dificultades encontraron en la resolución de las operaciones combinadas.

**5)** Extraiga todos los factores posibles de cada radical

a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt[3]{81}$ c) $\sqrt{20x^6y^{15}}$ d) $\sqrt{8x^4}$ e) $\sqrt[3]{3x^{17}b^{32}}$

f) $\sqrt[3]{136a^{15}b^{45}}$ g) $\sqrt{25h^{19}g^{32}}$ h) $\sqrt[3]{x^{25}b^{18}c^{13}}$ i) $\sqrt[4]{a^{17}b^{25}3^9}$

**6)** Resolver:

**a)** $\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\sqrt{2}+\sqrt{27}+5\sqrt{0,02}$

**b)** $2\sqrt{24}+\sqrt{54}+2\sqrt{18}-5\sqrt{6}$

**c)** $a\sqrt{ab^3}-2ab\sqrt{ab}+2b\sqrt{a^3b}-3\sqrt{a^2}b^2$

Indicar que dificultades encontraron en la resolución de las operaciones.

**8)** Resolver las siguientes operaciones.

**a)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{1+\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt{7}}$

**d)** $\frac{3}{\sqrt{5}}$ **e)** $\frac{2}{-4\sqrt{3}}$ **f)** $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

**9)** Realice las siguientes operaciones. Exprese el resultado como una potencia de exponente racional:

**a)** $3^{1/3}.3^{-1}$ **b)** $\left(2^{-1/4}.2^{1/10}\right)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}:\left(\frac{1}{5}\right)^{-2/3}$

**d)** $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3/2}.2^{-1}}{3^{-2/3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-2/3}}$ **e)** $\left[\dfrac{x^{-1/3}.\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2}}{x^{2/3}.(2x)^{-3/2}}\right]^{-1/2}$

## Unidad 3: Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad que se verifica para algunos valores asignados a sus variables.

- *Ejemplo de ecuación*

  x – 2 = 3x – 12

Esta ecuación sólo se satisface la igualdad cuando x = 5.

***Clasificación de las ecuaciones***

Las ecuaciones se clasifican en enteras, fraccionarias e irracionales

**a)** Una ecuación es **entera** cuando las variables o incógnitas están sometidas a las operaciones de suma, resta y producto, por ej.: 3x + 2 = 5x – 8

**b)** Una ecuación es **fraccionaria** cuando sus incógnitas, o por lo menos una de ellas se halla en el denominador, por ej.: $\frac{3x+2}{x} = 5x - 3$

**c)** Una ecuación es **irracional** cuando una incógnita figura bajo el signo radical, por ej.: $\sqrt{3x+2} = 3 - x$

### Ecuaciones Lineales o de primer grado

Una ecuación lineal o de primer grado con una incógnita, es una expresión de la forma ax+b = 0

***Ejemplo*:** 3x+12 = 0

3x = -12

x = -12:3

x = -4

Resolver una ecuación de primer grado es encontrar las raíces o valores que anulen la ecuación.

El conjunto de valores que anulan dicha ecuación se llaman **raíces** de la ecuación o bien se denomina Conjunto Solución.

En este caso la única raíz de esta ecuación, es x =4 o bien el conjunto solución S= $\{-4\}$.

Para calcular la raíz (o las raíces) de una ecuación, se aplican las propiedades de las operaciones de los distintos conjuntos numéricos.

Ejemplo:

2x+10=0

2x+~~10~~+(~~-10~~)=0+(-10) ley cancelativa, existencia de elemento opuesto.

2x+0 = -10

2x =-10 existencia de elemento neutro de la adición

$\frac{1}{2}$. ~~2~~x = $\frac{1}{2}$.(-10) existencia de inverso multiplicativo

X= -10 ley cancelativa.



***Actividades Grupales***

**1) Resolver las ecuaciones:**

a) $2x + 5x - 4 + 1 - 5 = 5 + 2 - 3 + 6x$

$b) 5x + 10 = 7 + 2x$ $c) 4(2x-1) = 3(x+2)$

$d) 5(3x-1) = 8(x+2)$ $e) \frac{x+1}{3} = 5 - 2$

$f) \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7$ $g) 2(2x-3) = 6 + x$

$h) \frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = 1$ i) $\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19$

j) $4(x-10) = -6(2-x) - 6x$ k) $2(x+1) - 3(x-2) = x + 6$

l) $\frac{x-1}{4} - \frac{x-5}{36} = \frac{x+5}{9}$ m) $\frac{5}{x-7} = \frac{3}{x-2}$

n) $\frac{4}{x-3} = \frac{5}{x-2}$ o) $2 - \left[-2 \cdot (x+1) - \frac{x-3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$

p) $\left[\left(a+\frac{1}{3}\right).\left(a-\frac{1}{3}\right)\right] = \sqrt[3]{\frac{1}{27}}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)^0$ q) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)^3 = x^2 + \frac{1}{2}(x+\frac{2}{3})$

r) $\sqrt{\frac{1}{2}y + \frac{2}{3}} + (-4)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{2}\right)$ s) $\sqrt{\frac{x}{2}} + 1 + \sqrt[3]{-\frac{1}{64}} = (-2)^{-2}$

2) Plantear y resolver las siguientes situaciones problemáticas, aplicando ecuaciones.

**a-** Dentro de 12 años Juan cumplirá 48 años. ¿Cuál es la edad de Juan?

**b-** El duplo de un número aumentado en 12 unidades da como resultado 30. ¿Cuál es el número?

**c-** El duplo de un número disminuido en 2 unidades nos da como resultado dicho numero aumentado en 2 unidades. ¿Cuál es dicho número?

**d-** Pablo llevo en sus vacaciones $1.700; esta cantidad representa 5 veces su ganancia semanal más $120 que tenía ahorrados. ¿Cuánto gana por semana?

**e-** Un vivero cobra un costo fijo de $18.000 por preparación de un pedido y $2.500 por cada bandeja de plantines. Si una compra costó $68.000, ¿cuántas bandejas se adquirieron?

**f-** Una brigada debe plantar 420 árboles. Después de plantar 75 durante la primera jornada, distribuye el resto en 5 jornadas iguales. ¿Cuántos árboles debe plantar por jornada?

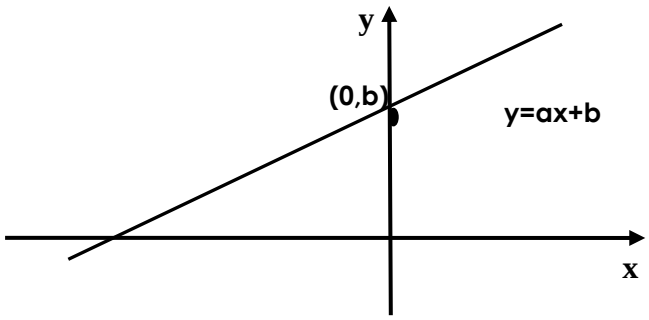
**g-** Un rollo de malla se utiliza para cercar tres lados iguales de un sector y un cuarto lado de 18 m. Si se usaron 72 m de malla, ¿cuánto mide cada uno de los tres lados iguales?
**h-** Un estudiante dispone de $36.000. Compra 4 cuadernos del mismo precio y le quedan $10.000. ¿Cuál es el precio de cada cuaderno?
**i-** Un tanque contiene cierta cantidad de agua. Se extraen 120 L y queda exactamente 2/3 de la cantidad inicial. ¿Cuál era el volumen inicial?

## Función lineal

Una función de **primer grado o lineal** en la variable x tiene la forma

**y=ax+b** donde

- **x** es la variable independiente
- **y** es la variable dependiente
- **a** es una constante y recibe el nombre de **pendiente** o parámetro de dirección
- La constante ***b*** recibe el nombre de **ordenada al origen** o parámetro de posición. Geométricamente representa la intersección de la recta con el eje *Y* en el punto (0,b).

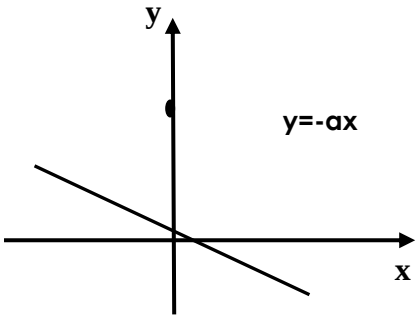



- **Cero o raíz** de la función lineal es el valor $x = -\frac{b}{a}$

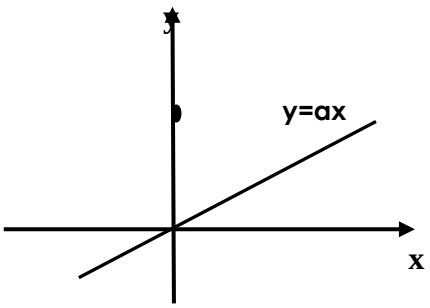
Geométricamente representa la abscisa de intersección de la recta con el eje *X*.

Casos Particulares:

- Si **a**≠0 y **b** = 0, la ecuación de la recta resulta **y=ax**
  que representa una recta que pasa por el origen de coordenadas

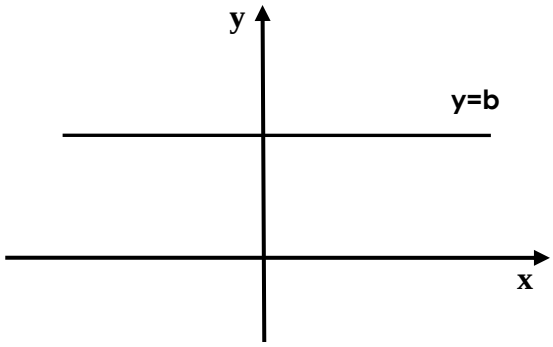



Si a<0, función decreciente

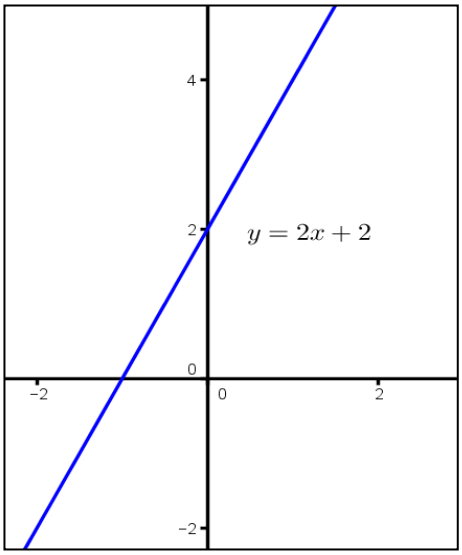


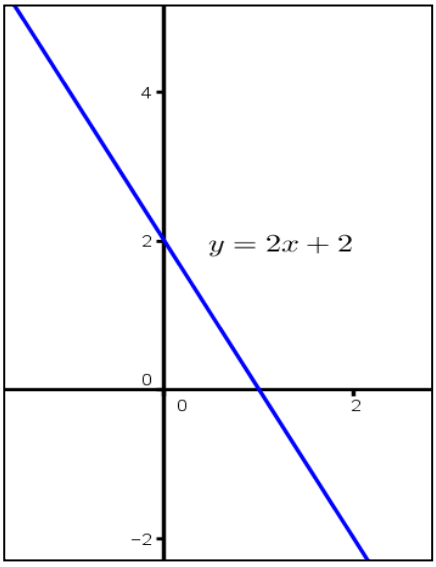

Si a>0, función decreciente

- Si a=0 y b≠0 , la ecuación de la recta resulta **y = b** y representa una recta paralela al eje *X*. La función definida por dicha ecuación se llama **función constante**.




**Ejemplos**




**Ecuación de la recta punto-pendiente**

Dado un punto $P=(x_0,y_0)$ y un número real **a**

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P=(x_0,y_0)$ y tiene pendiente **a** es de la forma

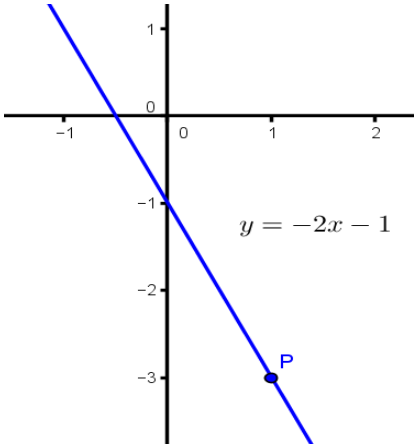
$$y-y_0=a(x-x_0)$$

**Ejemplo**

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por **P = (1,-3)** y tiene pendiente **a=-2**

**Solución:**

$$y-(-3)=-2(x-1)$$
$$y+3=-2\,x+2$$
$$y=-2\,x+2-3$$
$$y=-2\,x-1$$



## Rectas paralelas

Las rectas $R_1$ de ecuación $y_1 = a_1 x + b_1$ y $R_2$ de ecuación $y_2 = a_2 x + b_2$ son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.

Simbólicamente: $$R_1 // R_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

## Rectas perpendiculares

Las rectas $R_1$ de ecuación $y_1 = a_1 x + b_1$ y $R_2$ de ecuación $y_2 = a_2 x + b_2$ son perpendiculares si y solo si la pendiente de una es la recíproca y de signo opuesto de la otra.

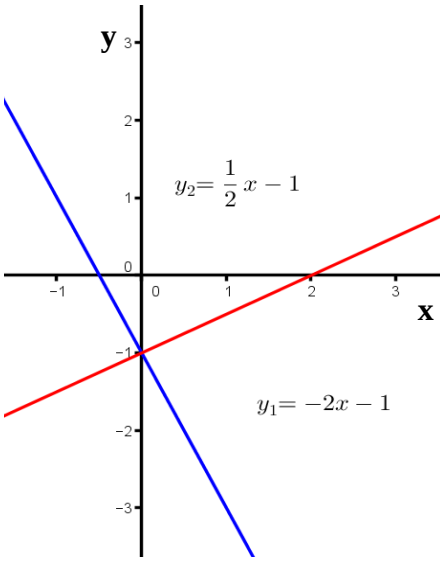
Simbólicamente: $$R_1 \perp R_2 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

**Ejemplos**

Las rectas

$y_1 = -2x - 1$ y $y_2 = \frac{1}{2}x - 1$

Son perpendiculares.




## Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$

La recta que pasa por los puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$ tiene por ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

**Ejemplo:**

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P=(-1,3) y Q=(1,-1)

Solución**:**

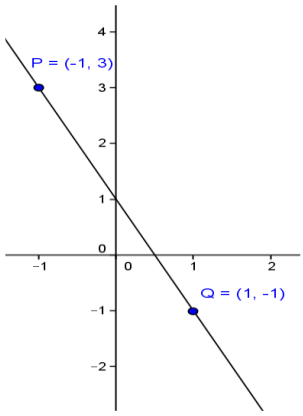
$$y-3=\frac{-1-3}{1-(-1)}\left(x-(-1)\right)$$

$$y-3=\frac{-4}{2}\left(x+1\right)$$

$$y=-2\left(x+1\right)+3$$

$$y=-2x-2+3$$

$$y=-2x+1$$






**Actividades:**

**1)** Encuentra la ecuación de la recta para los siguientes casos y represente gráficamente:

a) que pasa por el punto A= (1,-2) y tiene como pendiente m=-2
b) que pasa por el punto A= (2,3) y tiene como pendiente m=1/2
c) que pasa por el punto A= (-1,-2) y tiene como pendiente m=3

2) Obtenga la ecuación de la recta determinada por cada uno de los siguientes pares de puntos. Luego represente gráficamente.

i. $\begin{cases} P=(0,2) \\ Q=(1,-2) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} P=(-3,0) \\ Q=(0,-3) \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} P=(-3,-2) \\ Q=(1,2) \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} P=(-2,-2) \\ Q=(1,1) \end{cases}$

**3)** Resuelve las siguientes situaciones problemáticas:

a) Una empresa agroecológica realiza una inversión inicial de $50.000.000 para preparar el suelo con insumos orgánicos para futuros cultivos. El coste para preparar cada metro cuadrado de suelo es de $40.000. Además, la empresa debe pagar al operario $20.000 por cada metro cuadrado de suelo preparado.

Se decide que el precio de venta de cada metro cuadrado de suelo ya preparado sea de $150.000

Se pide:

- La función de beneficios (ganancias menos gastos) de la empresa en función del número metros cuadrados vendidos. Representar su gráfica.
- El número de metros cuadrados que deben venderse para que la empresa tenga unas ganancias de $100.000.000
- ¿Cuáles son los beneficios si se venden sólo 2000 metros cuadrados?

**b)** Una empresa que vende agua tiene dos máquinas embotelladoras:

- La máquina 1 produce 4 lotes de 12 botellas cada 2 minutos.
- La máquina 2 produce 5,5 lotes de 12 botellas cada 3 minutos.

Obtener:

- La función que proporciona el número de botellas que produce la máquina 1 en función del tiempo.

- Lo mismo para la máquina 2.
- Representar las gráficas de ambas funciones.
- ¿Qué máquina le conviene adquirir a la empresa?
- Comentar el resultado relacionándolo con las gráficas.

**c)** Un mamífero en peligro de extinción de Sudamérica de una reserva natural pesó 3,5kg al nacer. Sabiendo que los ejemplares de su especie aumentan una media de 2,5kg cada mes durante los primeros 3 años de vida, calcular:

- La función que proporciona el peso del mamífero en función de su edad (en número de meses). Indica el dominio de la función.
- Representar la gráfica de la función.
- Calcular, aplicando la función, el peso del mamífero a los 6 meses, 9 meses y 2 años de edad.
- ¿A qué edad el animal sobrepasará los 80kg de peso?

**d)** Un vivero tiene un costo fijo mensual de $450.000 y un costo variable de $850 por plantín producido. Escriba la función de costo C(x). Calcule el costo de producir 1.200 plantines y determine cuántos pueden producirse con $1.725.000.

**e)** Una camioneta de monitoreo parte con 70 L de combustible y consume, en promedio, 0,11 L por kilómetro. Modele la cantidad de combustible restante en función de los kilómetros recorridos. ¿Después de cuántos kilómetros quedarán 20 L?

**f)** Un tanque contiene 2.400 L y se vacía a razón constante de 80 L por minuto. Escriba y grafique la función. ¿Cuánto tarda en vaciarse? ¿Qué significado tienen la pendiente y la ordenada al origen?

**g)** Dos servicios de transporte cobran: A: $8.000 fijos más $900 por km; B: $3.500 fijos más $1.200 por km. Escriba ambas funciones, determine el punto de intersección e interprete qué representa.

## Ecuación de 2º grado

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma

$$\mathbf{ax^2+bx+c=0} \quad \text{con } a\neq 0.$$

Donde a, b y c reciben el nombre de coeficientes.

En dicha ecuación se tiene que $\underbrace{ax^2}_{\substack{Término\\ cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\substack{término\\ lineal}} + \underbrace{c}_{\substack{término\\ independiente}} = 0$

### Solución de la ecuación

La ecuación $ax^2+bx+c=0$ se resuelve mediante la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En dicha solución se llama **discriminante** de la ecuación a la expresión **"$b^2-4ac$"** y este valor permite determinar el tipo de soluciones. Podemos distinguir tres casos:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución doble.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

**Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas**

- Para $ax^2=0$ La dos soluciones son x = 0.

- Para $ax^2+bx=0$ , extraemos factor común x.

$$x(ax+b)=0$$

Igualamos cada factor a 0. Esto es

- $x=0$ y $ax+b=0$ , de donde

$$x = \frac{-b}{a}$$

- Para $ax^2 + c = 0$

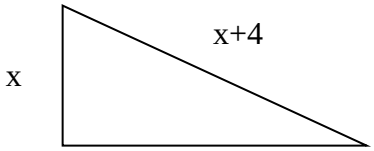
Despejamos:

$$ax^2 = -c \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \nearrow x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \searrow x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$



**Actividades grupales**

**1)** Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.




**2)** Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado

a) $2X\,(X\text{-}1) = 4$
b) $(X\text{-}7)\,.\,(X\text{+}6) = 0$
c) $9X^2 - 1 = 3$
d) $5X^2 - 3X = 0$
e) $9X^2 - 6X - 17 = 0$
f) $2X^2 + 21X = 0$

g) $X^2 - 3X - 4 = 0$
h) $X^2 - 4X + 5 = 0$
i) $x^2 + 3x + 2 = 0$
*j)* $x^2 - 7x + 12 = 0$
*k)* $2x^2 - 8x = 0$
*l)* $x^2 + 4x - 5 = 0$
*m)* $3x^2 - 12 = 0$

***3)*** *Plantear y resolver las siguientes situaciones problemáticas*

a) Calcular un numero que multiplicado por su consecutivo es igual a los cuatro tercios del cuadrado de dicho numero menos 216.
b) Calcular un número tal que la suma entre dicho número y la mitad de su cuadrado es igual a 60.
c) Calcular la edad de Lorena si sabemos que el cuadrado de su edad menos las tres cuartas partes del cuadrado de lo que va a tener el año que viene es igual a la edad que tenía el ano pasado más 43 años.
d) Un terreno rectangular tiene 6 m más de largo que de ancho y una superficie de 216 m². Determine sus dimensiones.
e) Se diseña un cantero rectangular de 96 m². Su largo mide 4 m más que su ancho. Determine las dimensiones.

## Función Cuadrática

*Recuerda:*

$y = ax^2 + bx + c$ es la función cuadrática.
La gráfica es una parábola.
La orientación de la parábola depende del signo de a:

$\begin{cases} a > 0 \text{ ramas hacia arriba} \rightarrow \text{función cóncava} \\ a < 0 \text{ ramas hacia abajo} \rightarrow \text{función convexa} \end{cases}$

El eje de simetría viene dado por la recta $x = \frac{-b}{2a}$

El vértice de la parábola tiene por abscisa $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

La ordenada la determinaremos sustituyendo este valor de $x_0$ en la función.
Los puntos de corte con el eje de abscisas vienen dados por las dos soluciones de la ecuación de segundo grado $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Son: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
El punto de corte con el eje de ordenadas viene dado por el punto (0, c).

**Ejercicios de autoaprendizaje:**

1. Sea la función: $y= x^2 - 6x + 5$. Estúdiala y dibújala.

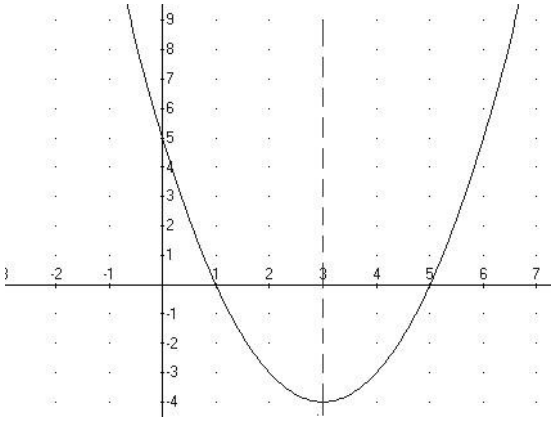
**Solución:**
Es una parábola con las ramas hacia arriba, porque $a = 1 > 0$.

El eje de simetría es la recta x $= \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

El vértice tiene por abscisa: $x_0 = 3$ y por ordenada: $y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$
Entonces el vértice es el punto $(3, -4)$

Para calcular los puntos de corte con el eje de abscisas hacemos: $x^2 - 6x + 5 = 0$.
Resolvemos y obtenemos:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} = \frac{10}{2} = 5 \\ = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$



Entonces los puntos de corte son: (5, 0) y (1, 0)
El punto de corte con el eje de ordenadas es (0, 5).
2. Calcula una función cuadrática que pase por los puntos (0, 1) (1, 0) y (−2, 9).

**Solución:**
Estamos buscando una función del tipo $y = ax^2 + bx + c$.
El punto de corte con el eje de ordenadas es: (0, 1).
Es decir, si sustituimos $x = 0$ obtenemos $y = 1$.
Por otro lado, si sustituimos en la función $x = 0$, obtenemos $y = c$ Entonces, $c = 1$.
De momento tenemos: $y = ax^2 + bx + 1$. Nos falta determinar a y b.
Como conocemos dos puntos más de esta parábola (1, 0) (−2, 9) sustituimos:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 \\ 9 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 1 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a + b + 1 \\ 9 = 4a - 2b + 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b = -1 \\ 2a - b = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b = -1 \\ 3a = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b = -1 \\ a = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} b = -2 \\ a = 1 \end{array}\right\}$$

Entonces, la función cuadrática es: $y = x^2 - 2x + 1$.

**Actividades:**

1. Dibuja las siguientes funciones cuadráticas:
   a) $y = x^2 - 6x + 10$
   b) $y = x^2 - 4x + 4$
   c) $y = -x^2 - 4x - 2$
   d) $y = x^2 - 4$
   e) $y = -2x^2 - x + 6$
   f) $y = x^2 + 2x + 2$

6. Una función cuadrática viene dada por la tabla siguiente:

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 17 | 10 | | 2 | 1 | | 5 | | 17 |

a) Completa la tabla teniendo en cuenta la simetría.
b) ¿Puedes determinar la fórmula que define esta función?
c) ¿Tiene valores negativos esta función?

7. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:
$f(x) = x^2$ $g(x) = x^2 + 2$ $h(x) = x^2 - 4$ $m(x) = x^2 + 4$
¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?

8. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:
$f(x) = -2x^2$ $g(x) = -2x^2 + 2$ $h(x) = -2x^2 - 2$ $m(x) = -2x^2 + 8$
¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?.

9. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:
$f(x) = x^2$ $g(x) = (x + 2)^2$ $h(x) = (x - 3)^2$ $m(x) = (x + 4)^2$
¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?

10. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:
$f(x) = -2x^2$ $g(x) = -2(x + 2)^2$ $h(x) = -2(x - 3)^2$ $m(x) = -2(x + 4)^2$
¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?

11. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:
$f(x) = x^2$ $g(x) = (x + 2)^2 + 1$ $h(x) = (x - 3)^2 - 4$ $m(x) = (x + 4)^2 + 2$
¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?

Nota:
La parábola $y=ax^2 +p$ es un traslado vertical (de p unidades) de la parábola $y = ax^2$

La parábola $y = a(x - q)^2$ es un traslado horizontal (de q unidades) de la parábola $y = ax^2$

12. Si lanzamos una piedra al aire la altura de la piedra recorre la siguiente función $f(t) = -5t^2 + 50t$ siendo t es el tiempo en segundos, y f(t) la altura en metros. Calcula el segundo que alcanza la máxima altura y cuál es la máxima altura. ¿En qué segundo cae a tierra?. Representa la función.

13. Un jugador de fútbol se encuentra a 8 metros de la portería. El portero está a 4 metros y puede cubrir saltando hasta 2'5 metros de altura. El jugador puede escoger para hacer el lanzamiento entre dos trayectorias, las correspondientes a las funciones

$y = 0'4x - 0'05x^2$ y $y = 1'6x - 0'2x^2$

¿Cuál es mejor?. ¿Por qué?

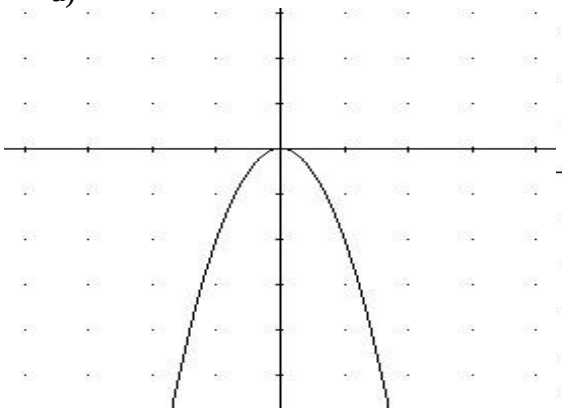
14. La altura de un objeto lanzado verticalmente se modela por $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$, donde h está en metros. Determine la altura inicial, el instante de altura máxima, dicha altura y el instante aproximado en que llega al suelo.

15. El beneficio de una pequeña producción se modela por $B(x) = -2x^2 + 120x - 1000$, donde x representa decenas de unidades. Determine el vértice y los ceros de la función e interprete ambos resultados en el contexto.

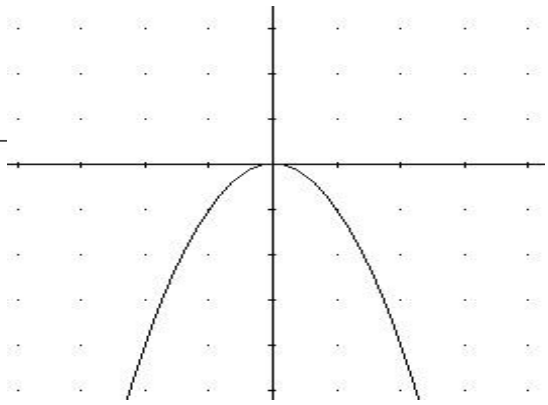
16. Identifica las siguientes funciones con sus gráficas correspondientes:

$f(x) = -x^2$ $g(x) = -x^2 + 3$ $m(x) = -x^2 - 3$ $n(x) = -2x^2$

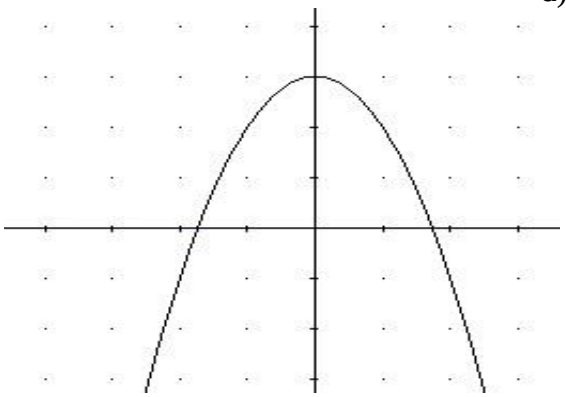
a)



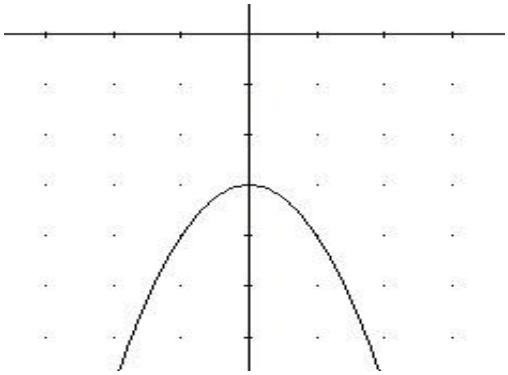
b)



c)



d)



## Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una *ecuación lineal con dos incógnitas* (o variables) *x* e *y* es una expresión de la forma

$$ax + by = c$$

donde *a*, *b*, y *c* son valores constantes ; *a*, *b* son distintos de cero y las variables *x* e *y* están elevadas a la potencia uno.

Resolver una ecuación con dos incógnitas significa hallar los pares ordenados (*x*,*y*) que verifiquen la igualdad.

Como la ecuación $ax + by = c$ representa gráficamente una recta, cada punto de la recta es solución de la ecuación dada y por lo tanto esta tiene infinitas soluciones.

Ejemplo:

La ecuación $-3x + y = -2$ tiene por conjunto solución $S = \{(0,-2),(1,1),(-1,-5),(-2,-8)...\}$

**sistemas de ecuaciones lineales**

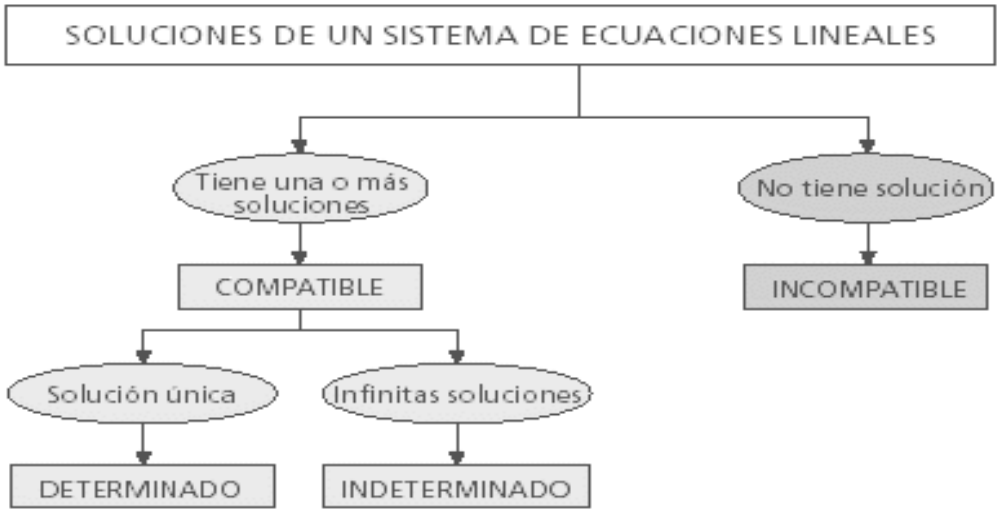
El conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado se llama *Sistema de ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas.* Para indicar que forman un sistema lo representamos del siguiente modo.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_1x + b_1y = c_2 \end{cases}$$

**Solución de sistemas lineales**

En el análisis de un sistema de ecuaciones lineales se pueden presentar varios casos:

- Si el sistema tiene solución, y ésta es única, se denomina *compatible determinado.*
- Cuando presenta varias soluciones posibles, es *compatible indeterminado*.
- Si no tiene solución, se denomina incompatible.




**Sistemas determinados: Métodos de Resolución**

**Método de igualación**

Una primera técnica algebraica común para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es el **método de igualación**. Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones resultantes; se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita obtenida y se sustituye este valor en las ecuaciones iniciales.

Sea, por ejemplo el sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$

Despejando x en ambas ecuaciones, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x = (8 - 2y)/3 \\ x = (5 + 3y)/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{8 - 2y}{3} = \frac{5 + 3y}{4} \Rightarrow 4(8 - 2y) = 3(5 + 3y)$$

Entonces, $32 - 8y = 15 + 9y \Rightarrow 17\,y = 17 \Rightarrow y = 1$.

Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones de x, se tiene que x = 2.

**Método de sustitución**

La técnica algebraica denominada **método de sustitución**, para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra; así, se obtiene una sola ecuación con una incógnita. Una vez obtenido el valor de esta incógnita, se sustituye su valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema, inicial para calcular el valor de la otra incógnita.

Sea el mismo sistema anterior de ecuaciones. Si se despeja,

y se sustituye en la segunda ecuación, se tiene que:

$$\frac{4(8-2y)}{3} - 3y = 5 \Rightarrow 4x = \frac{(8-2y)}{3} = 15 \Rightarrow 32 - 8y - 9y = 15.$$

$32 - 17y = 15 \Rightarrow\ 17 = 17y \Rightarrow\ y = 1$ Luego reemplazando este valor en

$x = \frac{(8-2y)}{3}$, se tiene que x = 2. Luego la solución es $S = \{(2,1)\}$.

**Método de determinantes**

Dado el sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

El símbolo $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ se denomina Determinante de segundo orden y lo representamos con la letra griega $\Delta$. Los números $a_1, b_1, a_2, b_2$ son los coeficientes de las incógnitas del sistema y los números $c_1, c_2$ son los términos independientes.

El valor de un determinante de segundo orden se puede expresar mediante el siguiente método:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

La solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el empleo de determinantes, es la siguiente:

- El valor de cada incógnita es una *fracción* que tiene por *denominador* el determinante de los coeficientes de las incógnitas y por *numerador* el determinante que se obtiene al reemplazar en el determinante anterior, la columna de los coeficientes por la columna de los términos independientes. Esto es

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{donde} \quad \Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \text{donde} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Siempre que $\Delta \neq 0$. Este método se conoce como *Regla de Cramer*.

Si ocurre que $\Delta = 0$ esta regla no puede aplicarse.

**Resumen:**

Si $\Delta \neq 0$, El sistema es compatible y determinado; es decir, tiene solución única que se obtiene por la Regla de Cramer.

Si $\Delta = 0$ y además $\Delta_x = 0$ y $\Delta_y = 0$, el sistema es compatible e indeterminado ( Es decir, tiene infinitas soluciones)

Si $\Delta = 0$ pero $\Delta_x \neq 0$ y $\Delta_y \neq 0$, el sistema es incompatible. (Es decir, no tiene solución)



**Actividades grupales**

**A) Para cada situación problemática, determinar:**

a) ¿Cuáles son los datos?
b) ¿Cuáles son las incógnitas?
c) ¿Qué información aporta el problema?
d) ¿Que expresión utilizaras para resolverlo?
e) Verifica los resultados encontrados.

**1)** Laura es 17 años mayor que Pablo y la suma de sus edades es 75 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

**2)** La diferencia de altura entre dos edificios es de 12 pisos y la suma de los mismos es de 32. ¿Cuántos pisos tienen cada uno?

**3)** Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

**4)** Hallar 2 números naturales tales que su suma es 8 y su diferencia es 4.

**5)** Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?

**6)** La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8. Hallar los números.

**7)** Hallar 2 números tales que su suma sea 17 y que uno de ellos mas el consecutivo del doble del otro es 27.

**8)** El triple de un número es igual a otro número aumentado en 5 unidades. La diferencia entre ambos es de 3 unidades. .De que números estamos hablando?

**9)** Ariel tiene 14 años menos que Emiliano y ambas edades suman 56 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

**10)** En un vivero se vendieron 90 plantas entre ejemplares nativos y ornamentales. Las nativas cuestan $3.000 y las ornamentales $4.500. La recaudación fue de $333.000. ¿Cuántas se vendieron de cada tipo?

**11)** En un aserradero se prepararon 56 piezas entre tablas de 2 m y tablas de 3 m. La longitud total de madera fue de 136 m. ¿Cuántas piezas de cada longitud se prepararon?

**12)** Para una campaña se compraron 35 herramientas entre palas y rastrillos. Cada pala cuesta $18.000 y cada rastrillo $12.000. Se gastaron $510.000. ¿Cuántas herramientas de cada tipo se compraron?

**13)** Dos parcelas suman 74 ha. La mayor tiene 16 ha más que la menor. Determine la superficie de cada una.

**14)** En una salida de campo participaron 48 personas entre estudiantes y docentes. Se utilizaron 5 vehículos: algunos con capacidad para 8 personas y otros para 12, ocupándose todos los lugares. ¿Cuántos vehículos de cada capacidad se utilizaron?

# Unidad 4: Polinomios

**Definición de polinomio**

Se llama polinomio de grado n en la variable x, a toda expresión algebraica entera de la forma:

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

donde

- $a_n, a_{n-1} \ldots a_1, a_0$ números reales a los que llamados coeficientes.
- $a_0$ es el término independiente.

**Grado de un polinomio**

El grado de un polinomio P(x) es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable x.

**Clasificación según el grado**

- Polinomio de grado cero : P(x) = 2
- Polinomio de primer grado: P(x) = 3x + 2
- Polinomio de segundo grado: $P(x) = 2x^2 + 3x + 2$
- Polinomio de tercer grado: $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$
- Polinomio de cuarto grado: $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

**Polinomio nulo:** Es aquel que tiene todos sus coeficientes nulos.

**Polinomio homogéneo:** polinomio homogéneo tiene todos sus términos o monomios con el mismo grado.
Ejemplo $P(x) = 2x^2 + 3xy$

**Polinomio completo**: Un polinomio completo tiene todos los términos.
Ejemplo $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$

**Polinomio ordenado**: Un polinomio está ordenado en forma decreciente si sus términos están ordenados de mayor a menor según su grado.
Ejemplo $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

**Polinomios iguales**: Dos polinomios son iguales si verifican:

1) Los dos polinomios tienen el mismo grado.
2) Los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales.

Ejemplo $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ y $Q(x) = 5x - 3 + 2x^3$

**Clasificación según el número de términos**

**Monomio**: Es un polinomio que consta de un sólo término. Ejemplo: $P(x) = 2x^2$
**Binomio**: Es un polinomio que consta de dos términos. Ejemplo: $P(x) = 2x^2 + 3x$
**Trinomio**: Es un polinomio que consta de tres términos. Ejemplo $P(x) = 2x^2 + 3x + 5$

**Valor numérico de un polinomio**

Es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera.
Por ejemplo. Sea $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$
El valor del polinomio para x = 1 es $P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 3 = 2 + 5 - 3 = 4$

## Sumas de polinomios

Se llama suma de dos polinomios P(x) y Q(x) al polinomio en la variable x cuyos términos se obtienen sumando los términos del mismo grado de P y Q.

**Ejemplo:** Sean $P(x)= 2x^2 + 6x + 5$ y $Q(x)= 3x^2 - 2x - 1$

$P(x)+Q(x)= (2+3)x^2 + (6-2)x + (5-1) = 5x^2 + 4x + 4$

Para efectuar la suma de polinomios conviene realizar la operación teniendo en cuenta la siguiente disposición:

Ejemplo: Sean $P(x)= 2x^2 + 6y + 3xy$ , $Q(x)=3x^2 - 5xy - x$ y $R(x)=6xy + 5$
Resolver: P(x)+Q(x)+R(x)

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 6y + 3xy \\ 3x^2 \quad - 5xy - x \\ \underline{\qquad\quad 6xy \quad + 5} \\ 5x^2 + 6y + 4xy - x + 5 \end{array}$$

Usar columnas te ayuda a poner juntos los términos similares en las sumas complicadas.

## Multiplicación de un número por un polinomio

Se llama producto de un polinomio P por un número real $\alpha$, a otro polinomio que tiene el mismo grado del polinomio dado y cuyos coeficientes resultan del producto de los coeficientes del polinomio por dicho número.

Ejemplo: Sean $P(x)= 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ y $\alpha=3$

$\alpha . P(x)= 3 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

## Multiplicación de monomios

La multiplicación de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tenga la misma base.

$$ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{n+m}$$

Ejemplo: Sean $P(x)= (-6x^3)$ y $Q(x)= 4x^5$

$P(x). Q(x)= -6x^3. 4x^5= (-6.4).(x^3. x^5)= -24. x^8$

**Multiplicación de un monomio por un polinomio**

La multiplicación de un monomio P y un polinomio Q, se resuelve aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, es decir, se multiplica el monomio P por cada termino del polinomio Q .

Ejemplo: Sean $P(x)= 3\ x^2$ y $Q(x)= 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

$$P(x)\ .\ Q(x)= 3\ x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$$

**Multiplicación de polinomios**

Para multiplicar dos polinomios se aplica la Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, es decir, se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo y luego se suman los términos semejantes.

Ejemplo: $P(x) = 2x^2 - 3 \quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$$P(x)\cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$$
$$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$$
$$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$$

Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican**.**

Para facilitar las operaciones suele adoptarse una disposición práctica similar a la usada para la multiplicación de varias cifras:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ \underline{\qquad\qquad 2x^2 - 3} \\ -6x^3 + 9x^2 - 12x \\ \underline{4x^5 - 6x^4 + 8x^3\qquad\quad} \\ 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x \end{array}$$

**Ejemplo:**

Efectuar de dos modos distintos la multiplicación de los polinomios:

**$P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 - x + 3$**

1° forma :

$$P(x) \cdot Q(x) = (3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) \cdot (2x^2 - x + 3) =$$
$$= 6x^6 - 3x^5 + 9x^4 + 10x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 6x^2 - 3x + 9$$
$$= 6x^6 + 7x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 9x + 9$$

2° Forma :

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 5x^3 \quad - 2x + 3 \\ \underline{\qquad\qquad 2x^2 - x + 3} \\ 9x^4 + 15x^3 \quad - 6x + 9 \\ -3x^5 - 5x^4 \quad + 2x^2 - 3x \\ \underline{6x^6 + 10x^5 \quad - 4x^3 + 6x^2\qquad} \\ 6x^6 + 7x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 9x + 9 \end{array}$$

## División de Polinomios

La división de polinomios de realiza de acuerdo con las reglas y propiedades de la división de números reales aunque la variable x no sea un número real.
Se pueden presentar los siguientes casos:

**a) División entre monomios**

La división de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tenga la misma base.

$$\mathbf{ax^n : bx^m = (a : b)x^{n-m}}$$

Ejemplo: Sean $P(x)=12x^8$ $Q(x)= 4x^2$

$P(x): Q(x)= 12x^8 : 4x^2 = (12:4).(x^8: x^2)=3x^6$

**b) División de un polinomio por un monomio**

La división de un polinomio P por un monomio Q, se resuelve aplicando la propiedad distributiva por derecha de la división con respecto a la suma, es decir, se divide a cada termino del polinomio P por el termino del monomio Q .

Ejemplo: Sean $P(x)=4x^5-10x^4+14x^3$ y $Q(x)= (-2x^2)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x^5 - 10x^4 + 14x^3}{-2x^2} = -2x^3 + 5x^2 - 7x$$

**Algoritmo de la división de polinomios**

Dados dos polinomios P y Q, dividir P por Q significa encontrar otros dos polinomios C y R llamados cocientes y resto.

1. P=Q.C+R.
2. Grado R < grado B o R es nulo.

Para facilitar las operaciones se adopta una disposición similar a la utilizada por la división de números de varías cifras.
**Los polinomios deben estar ordenados en forma decreciente, y el polinomio dividendo debe estar completo.**

Ejemplo:

$P(x) = 2x^5 + 2x^3 - x - 8$ $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$P(x)/ Q(x)$

A la izquierda situamos el dividendo y a la derecha el divisor. Si el polinomio no es completo dejamos espacio en los lugares que correspondan.

$$x^5 \quad +2x^3 \quad -x-8 \quad \big| \; x^2-2x+1$$

Dividimos el primer término del dividendo entre el primer termino del divisor.
Luego multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{lll} x^5 \quad +2x^3 & -x-8 & \big| \; x^2-2x+1 \\ \underline{-x^5+2x^4-x^3} & & x^3 \\ \quad 2x^4+x^3 & -x-8 & \end{array}$$

Volvemos a dividir el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$$\begin{array}{lll} x^5 \quad +2x^3 & -x-8 & \big| \; x^2-2x+1 \\ \underline{-x^5+2x^4-x^3} & & x^3+2x^2 \\ \quad 2x^4+x^3 & -x-8 & \\ \underline{-2x^4+4x^3-2x^2} & & \\ \quad 5x^3-2x^2-x-8 & & \end{array}$$

Procedemos igual que antes.

$$\begin{array}{lll} x^5 \quad +2x^3 & -x-8 & \big| \; x^2-2x+1 \\ \underline{-x^5+2x^4-x^3} & & x^3+2x^2+5x \\ \quad 2x^4+x^3 & -x-8 & \\ \underline{-2x^4+4x^3-2x^2} & & \\ \quad 5x^3-2x^2-x-8 & & \\ \underline{-5x^3+10x^2-5x} & & \\ \quad 8x^2-6x-8 & & \end{array}$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.

$$\begin{array}{lll} x^5 \quad +2x^3 & -x-8 & \big| \; x^2-2x+1 \\ \underline{-x^5+2x^4-x^3} & & x^3+2x^2+5x+8 \\ \quad 2x^4+x^3 & & \\ \underline{-2x^4+4x^3-2x^2} & & \\ \quad 5x^3-2x^2-x & & \\ \underline{-5x^3+10x^2-5x} & & \\ \quad 8x^2-6x-8 & & \\ \underline{-8x^2+16x-8} & & \\ \quad 10x-16 & & \end{array}$$

$10x - 6$ es el resto, porque su grado es menor que el del divisor y por tanto no se puede continuar dividiendo.
$x^3+2x^2+5x+8$ es el cociente.



**Actividades grupales**

1) Resuelve P(x) + Q(x) + R(x), siendo:

$P(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x - 4$ $\quad Q(x) = 3x^3 - 6x^2 - 3x$ $\quad R(x) = -8x^2 + 5$

Dados los siguientes polinomios:

| | | |
|---|---|---|
| $R(x) = 2x + 2$ | $Q(x) = 3x^2 - 2x + 5$ | $M(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3$ |
| $N(x) = 4x^4 - 2x^2 + 1$ | $P(x) = 4x^2 - 1$ | $S(x) = 3x^2$ |
| $V(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2$ | $W(x) = -3$ | $H(x) = x - 2$ |
| $Z(x) = -4x^2 + 6$ | $Y(x) = 2x + 1$ | $J(x) = 4x - 4$ |

2) Calcule:

**a)** M(x) + Q(x) **b)** S(x) + Z(x) **c)** H(x) - Y(x) **d)** V(x) - N(x)

**e)** R(x) + Q(x) - S(x) **f)** M(x) . S(x) **g)** P(x) . H(x) **h)** M(x) . Y(x)

**i)** $[S(x)]^2$ **j )** $\frac{1}{2}[R(x)]^2$ **k)** $\left[\frac{1}{2}R(x)\right]^2$ **l)** Q(x) : H(x)

**m)** [M(x) + R(x)] . P(x) **n)** V(x) : W(x) **o)** M(x) : S(x) **q)** V(x) : Q(x)

**r)** M(x) + R(x) . P(x) **s)** P(x) - V(x) : S(x) **t)** [P(x) - V(x)] : S(x)

**u)** $[P(x)]^2$ : W(x) - [R(x) - P(x)]

## Regla de Ruffini

Para calcular los coeficientes del cociente de una división de un polinomio por otro de la forma **x+a** se adopta una disposición práctica conocida con el nombre de *Regla de Ruffini*.

Vamos a tomar de ejemplo la división:

$$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$$

1) Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.
2) En la primera fila se escriben los coeficientes del dividendo completo y ordenad.
3) En la segunda fila, a la izquierda colocamos el opuesto de **a.**
4) En la tercera fila se escriben los coeficientes que se van obteniendo.
5) Bajamos el primer coeficiente.

| | 1 | 0 | -3 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | | |
| | 1 | | | | |

6) Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.

| | 1 | 0 | -3 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | | | |
| | 1 | | | | |

7) Sumamos los dos coeficientes.

| | 1 | 0 | -3 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | | | |
| | 1 | 3 | | | |

8) Repetimos el proceso anterior.

| | 1 | 0 | -3 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | 9 | | |
| | 1 | 3 | 6 | | |

| | 1 | 0 | -3 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | 9 | 18 | |
| | 1 | 3 | 6 | 18 | |

| | 1 | 0 | -3 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | 9 | 18 | 54 |
| | 1 | 3 | 6 | 18 | 56 |

El último número obtenido **(**56) es el resto.
El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al polinomio dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido en la última división

$$C(x)= x^3 + 3\,x^2 + 6x + 18$$

**Teorema del Resto**

El resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma (x - a) es el valor numérico de dicho polinomio para el valor x = a.

Ejemplo: **Calcular por el teorema del resto el resto de la división**

P(x) : Q(x)
$P(x)= x^4 - 3x^2 + 2$ $Q(x)= x - 3$
$P(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 =$ **56**



**Actividades grupales**

1) Realice las siguientes divisiones aplicando la regla de **Ruffini**, determine el cociente y el resto. Verificar el resto con el **Teorema del Resto**.
   a. $( x^3 – 7x^2 + 14x – 21) : (x – 2)$
   b. $(x^2 + 7x + 12) : (x + 3)$
   c. $\left(\frac{2}{5}x^3 + \frac{4}{5}x - \frac{9}{2}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$
   d. $( x + 32) : (x + 2)$

2) Resuelve las siguientes situaciones problemáticas:

a) El área de una parcela rectangular cuyos lados miden (x+4) y (x+7) puede expresarse mediante un polinomio. Obtenga el polinomio del área y calcular el área para x=6.

b) Un vivero dispone tres sectores cuadrados de lados x, x+2 y x+4 metros. Exprese mediante un polinomio la superficie total. Calcular el área para x=5.

c) Un marco rectangular exterior mide (x+6) por (x+4) metros y en su interior queda un sector rectangular de x por (x+2) metros. Obtener el polinomio que representa el área ocupada por el marco.

d) El volumen de una caja sin tapa se modela por V(x)=x(20-2x)(14-2x). Desarrollar el polinomio y calcular V(2). Indicar qué restricciones físicas debe cumplir x.

## Casos Especiales

**1) Cuadrado de un binomio:**

Sea por ejemplo: $(x+a)^2$

Podemos expresarlo como un producto de factores iguales usando las reglas operatorias de números reales.

$(x+a)^2 = (x+a) \cdot (x+a)$ definición de cuadrado

$(x+a)^2 = x^2+x.a+a.x+a^2$ propiedad distributiva.

$$(x+a)^2 = x^2+2xa+a^2$$

Regla: *el cuadrado de un binomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término más el doble producto del primero por el segundo.*

**2) Producto de la suma por la diferencia de dos términos**

Sea por ejemplo:

$(x+a) \cdot (x-a) = x^2-x.a+a.x-a^2$ propiedad distributiva

$$(x+a).(x-a) = x^2 - a^2$$

**Regla:** ***el producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos***

## Métodos de factoreo

### Factor común

Consiste en aplicar la propiedad distributiva.
$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a\,(b + c + d)$

**Descomponer en factores extrayendo factor común:**

**Ejemplo 1:**
$x^3 + x^2 = x^2\,(x + 1)$

**Ejemplo 2:**
$2x^4 + 4x^2 = 2x^2\,(x^2 + 2)$

**Ejemplo 3:**
$x^2 - ax - bx + ab = x\,(x - a) - b\,(x - a) = (x - a) \cdot (x - b)$

### Diferencia de cuadrados

Una diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia de dos términos.

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$



**Actividades:**

**1)** Extraer factor común:

**a)** $8x^2 - 4x^3 + 16x^4 + 12x^5$ **b)** $3a - 2an + 6a - 3ab$

**c)** $\frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{6}n^2 + \frac{4}{15}n^4$ **c)** $3a - 2an + 6a - 3ab$

2) Factorear según corresponda:

a) $(x + 5)(x - 5)$ b) $(x + 6)(x - 6)$ c) $x^4 - 16$

d) $x^4a + xa$ e) $x^2 - 4$ f) $(2x+3y)^2$

g) $(-x^3 - 5a^2)^2$ h) $x^2 - 9$ i) $x^2 + 7x + 12$

j) $2x^3 - 8x$ k) $x^3 - 4x^2 - x + 4$ l) $4x^2 + 12x + 9$

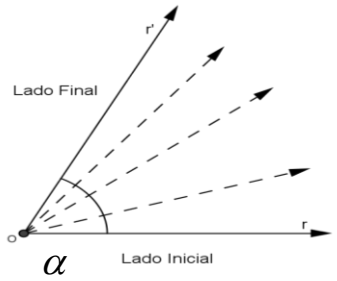
# Unidad 5: Elementos de Trigonometría

## Elementos de trigonometría

La Trigonometría se ocupa principalmente del estudio de las relaciones existentes entre los lados y los ángulos de un triángulo y proporciona elementos fundamentales para el estudio de otras ciencias como la Física, Astronomía, Topografía, Navegación, etc.

**Ángulos.**

Considérese un punto "o" del plano y una semirrecta que gira alrededor de él desde una posición inicial de "r" a una posición final "r' ". Se llama ángulo "$\alpha$" a la región del plano comprendido entre ambas posiciones r y r' , llamadas lado inicial y lado final respectivamente.




Se conviene fijar el sentido de giro de un ángulo de la siguiente manera:
Positivo (+) en sentido anti horario y negativo (-) en sentido horario.
Es posible generar ángulos positivos o negativos cuya amplitud supere un giro.

## Sistemas de medición de ángulos

Para medir la amplitud de los ángulos se necesitan unidades. Estas unidades están contempladas en distintos sistemas de medición.
Los dos sistemas más comunes son el *sexagesimal* y el *radial.*

## Sistema sexagesimal

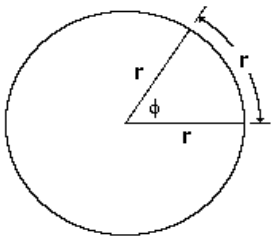
La unidad que se utiliza para medir la amplitud de un ángulo es el **grado sexagesimal,** que es la noventava parte de un ángulo recto.
Cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos, por lo que en un grado hay 3600 segundo.

**Equivalencias**

**$1^o$ =60 minutos**
**1'=60 segundos**
**$1^o$=3600 segundos**

## Sistema circular o radial

Este sistema se basa en la medición de los arcos de circunferencia, que se describen cuando una semirrecta gira para generar un ángulo.
En este sistema, la unidad de medida es el ***radián*** (simbolizado como **rad**) y se define como el ángulo cuyo arco tiene la longitud igual al radio de una circunferencia centrada en el vértice.



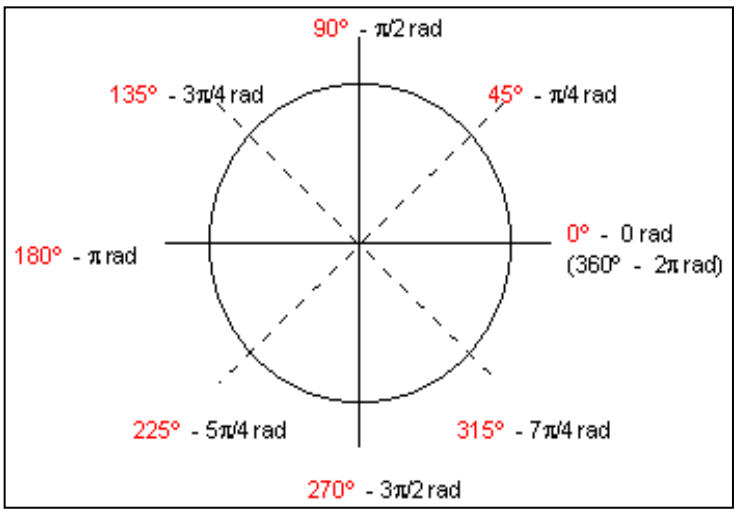

**¿Cuántos radianes hay en una circunferencia?**

La longitud de una circunferencia es igual a $2\pi$ r (r es el radio).

¿En cuántos segmentos de longitud "r" puede ser dividida esa longitud?

Para responder a esta pregunta hacemos el siguiente cálculo: $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

Luego se tiene que en una circunferencia hay $2\pi$ radianes como puede verse en el grafico.




**Pasaje del sistema sexagesimal a radial y viceversa:**

Cuando se desea pasar de grados sexagesimales a radianes (o a la inversa) se resuelve una regla de tres, siempre dejando el valor de $\pi$ sin operar, por ejemplo:

❖ ¿cuántos radianes son 60º?

360º ——————— $2\pi$ rad.

60º ——————— x rad.

$$x = \frac{60 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$$

❖ ¿cuántos grados son $\frac{\pi}{6}$ radianes?

360º ——————— $2\pi$ rad.

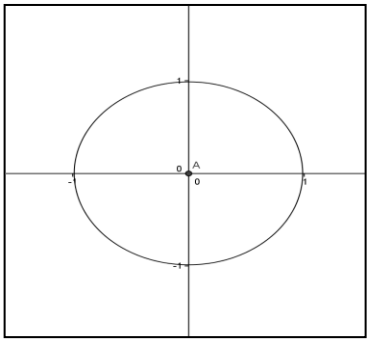
x ——————— $\frac{\pi}{6}$ radianes

$$x = \frac{\frac{\pi}{6}.360}{2\pi} = \frac{60\pi}{2\pi} = 30^o$$

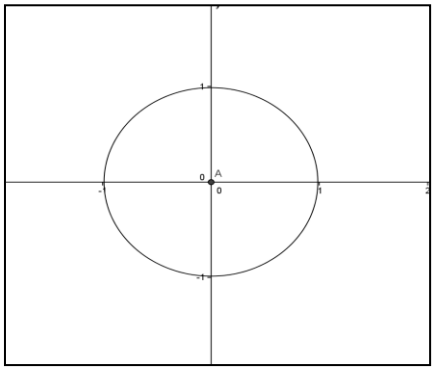
**Actividades**

1) En cada caso determinar el valor del ángulo en grados y representarlo gráficamente.

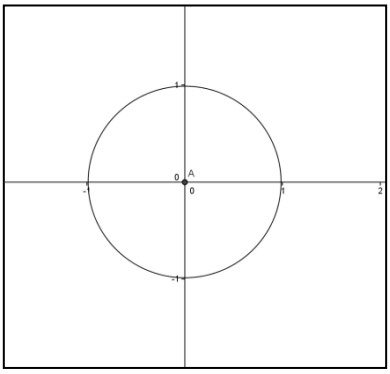
a) $\alpha = \frac{7\pi}{4}$



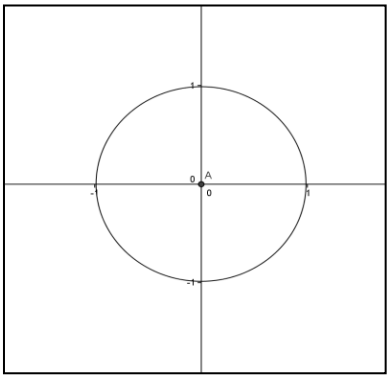
b) $\alpha = \frac{4\pi}{6}$



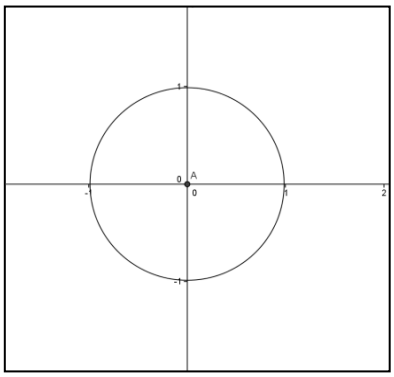
c) $\alpha = \frac{2}{5}\pi$



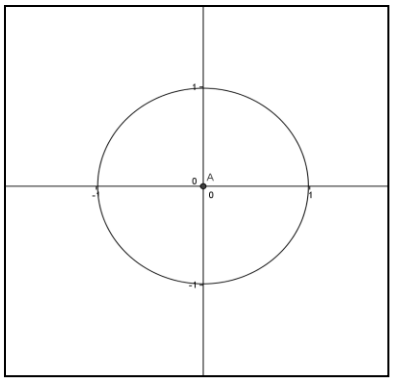
d) $\alpha = \frac{2}{5}\pi$



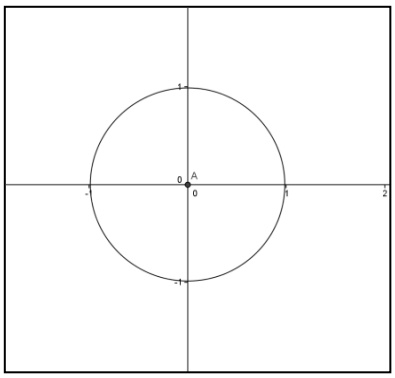
e) $\alpha = \frac{2}{5}\pi$



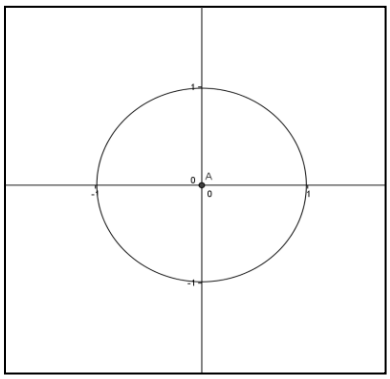
f) $\alpha = \frac{6}{8}\pi$



g) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$



h) $\alpha = -\frac{3}{5}\pi$



2) Dada la amplitud de un ángulo en grados, expréselo en el otro sistema de medición.

a) $\alpha = 25^o$ b) $\alpha = 85^o$

c) $\alpha = 160^o$ d) $\alpha = 225^o$

3) Convierta de radianes a grados y represente el ángulo.

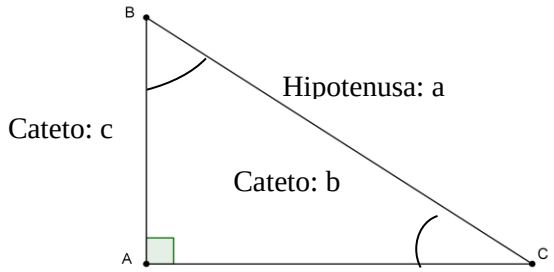
a) π/6 = b) 3π/4 = c) 5π/3

d) -π/4 e) 7π/6

## Resolución de triángulos rectángulos

**Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo**

Para establecer las razones trigonométricas en cualquier triángulo rectángulo, es necesario conocer previamente sus elementos.




Los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son agudos, el ángulo $\hat{A}$ es recto.

Puede notarse que los lados de los ángulos agudos están conformados por la hipotenusa y un cateto; y los del ángulo recto por los catetos.

Considerado uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo e identificada previamente la hipotenusa, es necesario diferenciar los catetos.

*Cateto adyacente*: es aquel lado que forma parte del ángulo al cual se hace referencia.

*Cateto opuesto*: corresponde al lado del triángulo que no forma parte del ángulo que se toma como referencia.

**Razones trigonométricas de un ángulo agudo**

Una *razón trigonométrica* es una razón de las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo.

Dado un triángulo rectángulo *ACB* como el de la figura anterior, se pueden formar 6 razones con sus tres lados:

$$\frac{c}{a},\ \frac{b}{a},\ \frac{c}{b} \quad \text{y} \quad \frac{a}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{b}{c}$$

Cada una de las razones arriba mencionadas es una función que se denomina trigonométrica y se define a continuación:

$$sen\hat{C} = \frac{cateto\ \text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\bar{c}}{\bar{a}} \qquad \cot g\hat{C} = \frac{cateto\ \text{adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\bar{b}}{\bar{c}}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{cateto\ \text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \qquad \sec\hat{C} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \text{adyacente}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

$$tg\hat{C} = \frac{cateto\ \text{opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\bar{c}}{\bar{b}} \qquad \cos ec\hat{C} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \text{opuesto}} = \frac{\bar{a}}{\bar{c}}$$

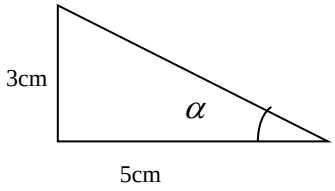
**Importante:** el ángulo considerado en todos los casos es el *mismo***,** vale decir que la razón no depende de la longitud de los lados.

**Ejemplo:**

Obtener las razones trigonométricas del ángulo menor del triangulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 5 cm.

Aplicando el Teorema de Pitágoras, el valor de la hipotenusa *h* es:

$$h = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$




Luego

$$sen\hat{\alpha} = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \cos\hat{\alpha} = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad tg\hat{\alpha} = \frac{3}{5}$$

De las definiciones anteriores se deduce que:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \cos ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

**Importante:**

Presentamos ahora las razones trigonométricas de ciertos ángulos que son de uso frecuente.

| | 0º | 30º | 45º | 60º | 90º |
|---|---|---|---|---|---|
| sen | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| cos | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| tg | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ |

**Resolución de triángulos rectángulos**

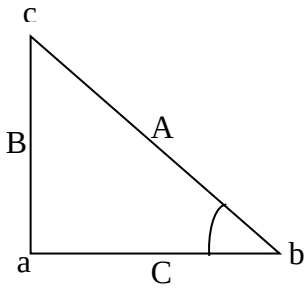
Resolver un triángulo, consiste en hallar los elementos desconocidos de él, dados otros elementos. Para ello es necesario conocer tres elementos del triángulo ( uno al menos debe ser una lado), debiendo calcular los otros tres.

En el caso de que el triángulo sea rectángulo, uno de los datos, el ángulo recto es ya conocido, por lo cual, los datos sólo deben ser dos, siendo uno un lado.

Se presentan a continuación diferentes casos representativos para la resolución de triángulos rectángulos.

❖ **Caso 1:** se conocen la hipotenusa y un cateto.

Sean A=42 cm y B=25 cm, obtener el valor de todos los lados y todos los ángulos.




- Cálculo del cateto C

Por el Teorema de Pitágoras es

$C^2 = A^2 - B^2$ entonces $C = \sqrt{A^2 - B^2}$

$C = \sqrt{(42)^2 - (25)^2} \approx 33{,}7$ cm

- Cálculo del ángulo b

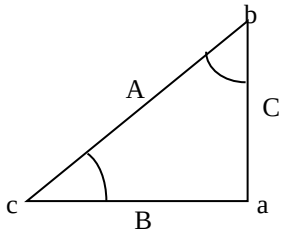
$sen\, b = \frac{B}{A}$ entonces $sen\, b = \frac{25}{42}$

luego $b = arc\, sen\left(\frac{25}{42}\right)$ y $b \approx 36{,}5^\circ$

- Cálculo del ángulo $c$

$c = 90^0 - b$ entonces $c = 90^\circ - 36{,}5^\circ = 53{,}5^\circ$

❖ **Caso 2:** Se conocen los dos catetos




Sean B = 33 cm y C = 21cm catetos del triangulo rectángulo $a\hat{b}c$

- Cálculo de los ángulos $b$ y $c$

$$tg\ \mathrm{b} = \frac{B}{C} \quad \Rightarrow \quad b = arctg\ \frac{B}{C}$$

$$tg\ \mathrm{b} = \frac{33}{21} \quad \Rightarrow \quad b = arctg\left(\frac{33}{21}\right) \cong 57^{\circ}32'$$

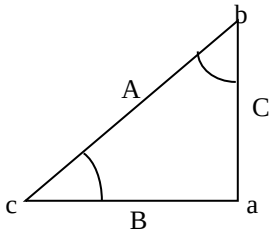
luego $c = 90^0 - b \ \Rightarrow\ c = 90^{\circ} - 57^{\circ} = 32^{\circ}28'$

- cálculo del otro cateto

Por teorema de Pitágoras

$$A = \sqrt{(33)^2 - (21)^2} = 39{,}12 \quad cm$$

❖ **Caso 3:** Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo.




Sean A= 45 m y $b = \hat{22}^{\circ}$ la hipotenusa y un ángulo del siguiente triángulo

- el valor del ángulo $\hat{c} = 90^0 - \hat{b} \ \Rightarrow\ \hat{c} = 90^{\circ} - 22^{\circ} = 68^{\circ}$
- el valor del lado B esta dado por

$$\cos c = \frac{B}{A} \Rightarrow \quad B = A.\cos c \ \Rightarrow\ B = 45.\cos 68^{\circ}$$

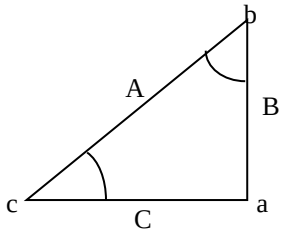
Luego $B = 16{,}85 \quad m$

- el valor del lado C queda determinado por

$$sen\ c = \frac{C}{A} \ \Rightarrow\ C = A.sen\, c \ \Rightarrow\ C = 45.sen\, 68^{\circ}$$

Luego $C = 41{,}72 \quad m$

❖ **Caso 4**: Se conocen un cateto y un ángulo agudo.



Sean B= 5,2m y $\hat{b} = 37^\circ$ un lado y un ángulo respectivamente del siguiente triangulo

- El valor del ángulo $\hat{c} = 90^0 - \hat{b} \Rightarrow \hat{c} = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$
- El valor de la hipotenusa A esta dado por:

$$sen b = \frac{B}{A} \Rightarrow A = \frac{B}{sen b} \Rightarrow A = \frac{5,2}{sen\, 37^\circ}$$

Entonces *A*= 8,64 m

- el valor del cateto C se puede obtener por Teorema de Pitágoras o bien del siguiente modo

$$\cos b = \frac{C}{A} \Rightarrow C = A.\cos b \Rightarrow$$

$$C = 8,64.\cos 37^\circ \Rightarrow C = 6,9\ \text{m}$$

**Importante:**

A menudo, cuando se resuelven problemas de trigonometría, es necesario conocer dos conceptos fundamentales: **ángulo de elevación** y **ángulo de depresión.**
El **ángulo de elevación** es el ángulo medido desde la horizontal hasta el punto donde una persona tendría que elevar su línea de visión para ver un objeto. De manera semejante, el **ángulo de depresión,** es el ángulo medido desde la horizontal, hasta el lugar donde la persona tendría que bajar su línea de visión para localizar un objeto.

**Ejemplo**

Una persona esta parada a 50 m de la base de una torre. El ángulo de elevación hasta la cima de la torre es de $76^\circ$. ¿Cuál es la altura de la torre?




***Solución*:**
¿Qué conocemos del problema?

- ✓ el valor del ángulo de elevación $\alpha = 76^\circ$
- ✓ el cateto adyacente al ángulo 50 m

¿Qué debemos determinar?

- ✓ la altura de la torre, que representa al valor del cateto opuesto al ángulo.

Por la tanto la razón trigonométrica pertinente es la tangente.

$$tg\,76^{\circ} = \frac{x}{50}$$

de donde

$$x = 50.tg\,46^{\circ}$$

$$x = 50.(4{,}0107809\ )$$

$$x = 200{,}53905$$

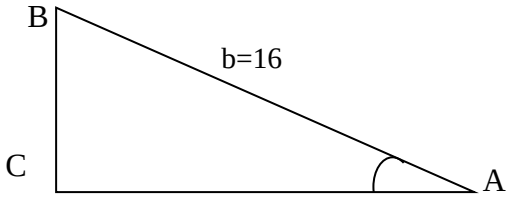
La torre mide aproximadamente 200,5 m de altura.



**Actividades de aplicación**

**1)** Halle las razones trigonométricas del ángulo " α " de un triángulo rectángulo sabiendo que su hipotenusa es el doble de su cateto opuesto que mide 9 m.

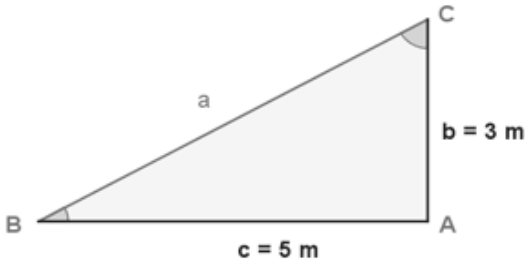
**2)** En la figura, el ángulo A= 30º y b = 16, determine la longitud de los demás lados del triángulo.



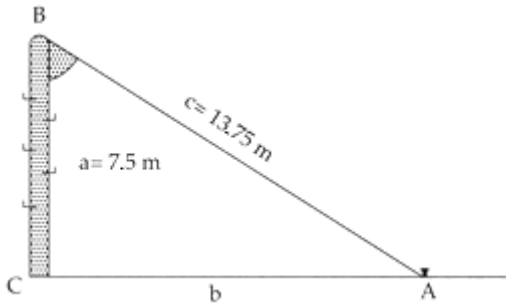

**3)** Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de largo. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.

**4)** Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa de un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60 °.

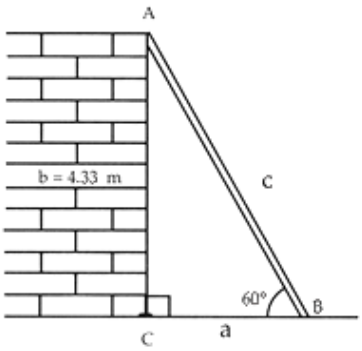
**5)** Encontrar el valor de los ángulos agudos del siguiente triángulo.



**6)** Obtener el ángulo que forma un poste de 7.5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero hasta el piso, y que tiene un largo de 13.75 m




**7)** Obtener la longitud de una escalera apoyada en una pared de 4.33 m de altura que forma un ángulo de 60º con respecto al piso.




**8)** Resuelve los siguientes problemas:

**a)** Un árbol proyecta una sombra de 18 m cuando el ángulo de elevación del Sol es de 38°. Determine la altura del árbol.

**b)** Desde un punto situado a 25 m de la base de una torre se observa su extremo superior con un ángulo de elevación de 52°. Calcule la altura de la torre.

**c)** Para sostener un árbol joven se coloca un tensor de 8 m desde un punto del suelo situado a 5 m de la base. ¿A qué altura del tronco se fija el tensor? ¿Qué ángulo forma con el suelo?

**d)** Desde una margen de un río se observa la copa de un árbol situado en la margen opuesta con un ángulo de elevación de 31°. Si la altura del árbol es de 14 m y el terreno es horizontal, estime el ancho del río.

**e)** Un dron se encuentra a 120 m de altura. El ángulo de depresión hacia un punto de control en el suelo es de 40°. ¿A qué distancia horizontal se encuentra el punto respecto de la proyección vertical del dron?

**f)** Desde un punto del terreno se observa la copa de un árbol con un ángulo de 30°. Al avanzar 12 m hacia el árbol, el ángulo pasa a 55°. Determine la altura aproximada del árbol.

**g)** Para medir el ancho de un cauce sin atravesarlo, un observador se ubica frente a un árbol de la orilla opuesta. Luego se desplaza 20 m paralelamente a la orilla y mide un ángulo de 47° entre la línea de la orilla y la visual al árbol. Determine el ancho aproximado del cauce.

**h)** Un poste de 9 m está sujeto por un cable desde su extremo superior hasta el suelo. Si el cable forma 58° con el suelo, determine su longitud y la distancia desde la base del poste hasta el punto de anclaje.

**i)** En una ladera, una persona observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación de 28°. Luego avanza 30 m en dirección a la torre y el ángulo aumenta a 46°. Suponiendo terreno horizontal entre ambos puntos de observación, determine la altura de la torre.

**j)** Una escalera de 8,2 m está apoyada en una pared de forma que alcanza una altura de 6m. ¿Qué ángulo forma con el suelo?

**k)** Una escalera de 6,5 m de longitud se apoya sobre una pared vertical formando con ella un ángulo de 18º. Cuál es la altura que alcanza.

**l)** Una torre de 40 m de altura proyecta una sombra de 16 m de longitud. ¿Qué sombra proyectará un árbol de 12 m de altura?

**m)** Para determinar la altura de un poste no hemos alejado 7 m de su base, hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40º. ¿Cuánto mide el poste?

**n)** Para conocer la altura de una torre hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un resultado de 34º. Al acercarnos 15 m hacia la torre, obtenemos un nuevo ángulo de 57º. ¿Cuánto mide la altura de la torre?.

**o)** Un árbol y un observador se encuentran en orillas opuestas de un río. El observador mide el ángulo que forma la visual con el punto más alto del árbol y obtiene 35º; retrocede 10 m y mide el nuevo ángulo, obteniendo un resultado de 25º. ¿ Qué altura tiene el árbol?.

**p)** Estando situado a 87 m de un olmo, veo su copa bajo un ángulo de 22º. Mi amigo ve el mismo olmo bajo un ángulo de 25º. ¿ A qué distancia está mi amigo del olmo?

**q)** Queremos conocer el ancho de un río, para lo cual nos situamos justo en una de las orillas y dirigimos la visual a un poste que se encuentra justo enfrente de nosotros en la otra orilla obteniendo un ángulo de 53º. Al alejarnos de la orilla perpendicularmente un total de 20 m y mirar de nuevo el poste el ángulo es ahora de 32º. ¿Cuánto mide el río de ancho?.

**r)** Una antena de radio está sujeta al suelo mediante dos cables que forman con la antena ángulos de 36º y 48º. Si los puntos de sujeción de los cables al suelo y el pie de la antena se encuentran alineados y a una distancia total de 98 m, calcula la altura de la antena.

**s)** Calcular la altura de una chimenea sabiendo que la visual dirigida al punto más alto por un observador de 1,80 m de altura, que se encuentra a 48 m de distancia del pie de la chimenea, forma un ángulo de 36,67º con la horizontal.