SERIE DIDÁCTICA N° 51

ISBN 978-987-8922-27-0

FACULTAD DE CIENCIAS FORESTALES
Ing. Néstor René Ledesma

UNSE
Universidad Nacional de Santiago del Estero

CÁTEDRA DE FÍSICA

MATEMÁTICA PARA COMENZAR A ESTUDIAR FÍSICA UNIVERSITARIA

Ing. Angel Rossi
Ay. Enzo Daniel Ibarra

Octubre 2023

Rossi, Ángel
Matemática para comenzar a estudiar Física: cátedra de física / Ángel Rossi; Enzo Daniel Ibarra. - 1a ed. - Santiago del Estero: Universidad Nacional de Santiago del Estero - UNSE. Facultad de Ciencias Forestales, 2023.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-8922-27-0

1. Física. 2. Matemática. 3. Universidades. I. Ibarra, Enzo Daniel. II. Título.
CDD 510.711

MATEMÁTICA PARA COMENZAR A ESTUDIAR FÍSICA UNIVERSITARIA

El siguiente material está dirigido especialmente a los estudiantes de la Facultad de Ciencias Forestales de la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

En esta Serie Didáctica, **Matemática para comenzar a estudiar Física universitaria,** es una obra en la que se abordan contenidos indispensables que todo estudiante debe conocer para interpretar con facilidad los distintos temas que se estudian en Física.

En años como docente universitario y como profesor de Física en particular pude advertir falencias matemáticas que los alumnos tienen al comenzar sus estudios universitarios, puesto de manifiesto especialmente durante el cursado de Cursos de Ingreso. En virtud de ello nació la idea de colaborar con el aprendizaje y de esta manera ayudarlos de alguna forma con la comprensión de temas que en Física desarrollamos.

Los contenidos de Matemática que se desarrollan son aquellos con los que el alumno no solo debe familiarizarse sino también debe dominarlos dada su importancia, siendo estos una base necesaria en cualquier curso de Física universitaria.

Los conceptos mínimos matemáticos para el comienzo del estudio de la Física que aquí se desarrollan son: Ecuaciones matemáticas, resolución de ecuaciones (de utilidad en el momento de despejar cualquier incógnita en función de las variables Físicas), ecuaciones de primer grado (en MRU), ecuación de segundo grado (en MRUV), interpretación de gráficos, nociones básicas de Trigonometría (en operaciones con vectores). Todos los contenidos mencionados están desarrollados de una forma tal que considero la apropiada para facilitar el estudio de la Física.

Espero que este material cumpla con los objetivos propuestos y así también dejar la posibilidad de recibir sugerencias que podrían mejorar la presente obra.

Ing. Ángel Rossi

Agradecimientos

A Enzo Daniel Ibarra, estudiante de Ing. Forestal. Por el tipeo del material. A la Dra. Evangelina Gonzalez por sus sugerencias tan valoradas.

INDICE

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Definición de ecuación:

Ecuación: es una igualdad algebraica que consta de dos partes perfectamente definidas; el primer miembro y el segundo miembro, distinguiéndoselos a través del signo igual; quedando el primero hacia la izquierda y el segundo hacia la derecha de este signo.

Primer miembro Segundo miembro

$$(\dots + \dots) = (\dots + \dots)$$

En la ecuación puede observarse una combinación de operaciones matemáticas (+, -, : , $\sqrt{\ }$, etc.), utilizando para tal fin números y letras ($x, y, z,$ etc.). cada letra representa un número real, de valor desconocido, es por ello que se llaman incógnitas, y nuestro objetivo es averiguar los posibles valores que pueden asumir esas incógnitas.

En una misma ecuación se pueden encontrar múltiples incógnitas ($x, y, z,$ etc.). En los ejemplos que se desarrollaran en la primera etapa de este curso solo lo haremos con la incógnita x solo por practicidad.

Esta incógnita tiene su valor establecido a partir de la relación que la vincula con los otros elementos de la ecuación. En este curso, se estudiará un método que nos permitirá (manteniendo la igualdad en ambos miembros) encontrar el valor de la incógnita.

Se define ecuación de 1er grado, a aquella donde el exponente al que está elevada la incógnita ("x" en nuestro caso) es 1 (uno).

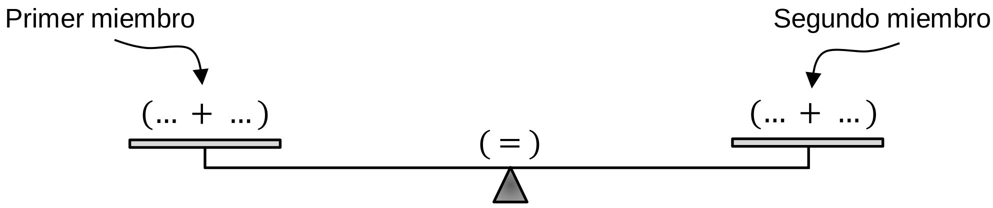
Por ejemplo, tengo la siguiente ecuación:

$$x + 15 = 70$$

Resolver esta ecuación, significa encontrar el valor de nuestra incógnita (x) que sumado al número 15, en nuestro caso, obtengamos como resultado el número 70 (en el segundo miembro).

Como se resuelve una ecuación

Lo primero a tener en cuenta es que en todo momento debemos mantener la igualdad de los dos miembros. Si efectuamos una modificación en cualquiera de ellos, debemos, efectuar la misma modificación en el otro, para que de esta manera se mantenga la igualdad. Esta situación se puede asemejar a una balanza con sus dos platos en equilibrio, donde en cada plato colocaríamos un miembro de la ecuación, y el punto medio de la balanza representaría el signo igual. Se puede imaginar aquí que, si en un miembro hacemos una operación, en el otro debemos hacer exactamente lo mismo, para no desequilibrar la balanza, para no "desequilibrar" la igualdad.



Resolvamos la siguiente ecuación:

$$x + 15 = 70$$

Restamos en los dos miembros 15 (para eliminar el Nº 15 del primer miembro), entonces se tiene.

$$x + \underbrace{15 - 15}_{\text{se anulan}} = 70 - 15 = 55 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 55}$$

$$55 + 15 = 70$$

Con lo que hemos obtenido el valor de nuestra incógnita x, en nuestro caso igual a 55, que al sumarlo con el 15, se obtiene el valor del segundo miembro (70).

Esta es la forma como se resolverán todos los ejercicios que siguen, como por ejemplo el Nº 6 de los propuestos en la página siguiente.

$$4x = 80$$

Necesitamos eliminar el "4" del primer miembro, como está multiplicando a x, la operación que debo realizar ahora en ambos miembros es una división entre 4, (para que el cuatro se simplifique en el primer miembro).

Se tiene:

$$4x = 80$$

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{80}{4} \Rightarrow \boxed{x = 20}$$

Todos los ejercicios que se proponen, se resuelven de la misma forma que los ejemplos desarrollados.

1) $x + 15 = 70 \Rightarrow x + 15 - 15 = 70 - 15 \Rightarrow x = 70 - 15 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 55}}$

- Se resta en ambos miembros 15

2) $x - 30 = 85 \Rightarrow x - 30 + 30 = 85 + 30 \Rightarrow x = 85 + 30 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 115}}$

- Se suman en ambos miembros 30

3) $x + 10 = -30 \Rightarrow x + 10 - 10 = -30 - 10 \Rightarrow x = -30 - 10 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -40}}$

- Se resta en ambos miembros 10

4) $x + 50 = 15 \Rightarrow x + 50 - 50 = 15 - 50 \Rightarrow x = 15 - 50 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -35}}$

- Se resta en ambos miembros 50

5) $80 + x = 20 \Rightarrow 80 + x - 80 = 20 - 80 \Rightarrow x = 20 - 80 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -60}}$

- Se resta en ambos miembros 80

6) $4 * x = 80 \Rightarrow \frac{4 * x}{4} = \frac{80}{4} \Rightarrow x = \frac{80}{4} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 20}}$

- Se divide en ambos miembros entre 4

7) $\frac{x}{20} = -100 \Rightarrow \frac{x}{\cancel{20}} * \cancel{20} = (-100) * 20 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -2000}}$

- Se multiplica en ambos miembros por 20

8) $4 - 8x = -5x \Rightarrow 4 - 8x + 5x = -5x + 5x \Rightarrow 4 - 3x = 0 \Rightarrow$

- Se suma en ambos miembros $5x$, (observese que ahora la "x" queda solo en el primer miembro).

$$\Rightarrow 4 - 4 - 3x = 0 - 4 \Rightarrow -3x = -4 \Rightarrow \frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}} = \frac{-4}{-3} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = \frac{4}{3}}}$$

- Se resta en ambos miembros (-4) y luego se divide en ambos miembros por (-3).

9) $-x + 2 = -8 \Rightarrow -x + 2 - 2 = -8 - 2 \Rightarrow -x = -10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x * (-1) = -10 * (-1) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 10}}$$

$\Rightarrow$

10) $\frac{200}{x} = 40 \Rightarrow \frac{200}{x} * x = 40 * x \Rightarrow 200 = 40 * x \Rightarrow \frac{200}{40} = \frac{40}{40} * x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{200}{40} = x \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{5 = x}} \quad \text{ó} \quad \boxed{\boldsymbol{x = 5}}$$

11) $\frac{x+2}{2} = 4 \Rightarrow \frac{x+2}{\cancel{2}} * \cancel{2} = 4 * 2 \Rightarrow x + 2 = 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x + 2 - 2 = 8 - 2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 6}}$$

12) $\frac{2x+3}{4} = 5 \Rightarrow \frac{(2x+3)}{\cancel{4}} * \cancel{4} = 5 * 4 \Rightarrow 2x + 3 = 20 \Rightarrow$

$$2x + 3 - 3 = 20 - 3 \Rightarrow 2x = 17 \Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{17}{2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = \frac{17}{2}}}$$

13) $5x - 2x = 45 \Rightarrow 3x = 45 \Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{45}{3} \Rightarrow x = \frac{45}{3} \Rightarrow \boxed{x = 15}$

14) $7x - 4 = 2x + 8 \Rightarrow 7x - 2x - 4 = 2x - 2x + 8 \Rightarrow 5x - 4 = 8$

$$\Rightarrow 5x - 4 + 4 = 8 + 4 \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{12}{5} \Rightarrow \boxed{x = \frac{12}{5}}$$

15) $\dfrac{4-3}{2x}=5 \Rightarrow \dfrac{4-3}{\cancel{2x}} * \cancel{2x} = 5 * 2x \Rightarrow 4-3=10x \Rightarrow \dfrac{1}{10}=\dfrac{10x}{10}$

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}=\boldsymbol{x} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{x}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}}$$

16) $\dfrac{4+2x}{4x}=3 \Rightarrow \dfrac{4+2x}{4x} * 4x = 3 * 4x \Rightarrow 4+2x=12x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4+2x-2x=12x-2x \Rightarrow 4=10x \Rightarrow \dfrac{4}{10}=\dfrac{10x}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}=\boldsymbol{x} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{x}=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}}}$$

17) $\dfrac{5}{6}x+1=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{5}{6}x+1-1=\dfrac{2}{3}-1 \Rightarrow \dfrac{5}{6}x=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dfrac{5}{6}x * \dfrac{6}{5} = -\dfrac{1}{\cancel{3}} * \dfrac{\overset{2}{\cancel{6}}}{5} \Rightarrow \boxed{x=-\dfrac{2}{5}}$$

❖ Los siguientes son ejemplos de ecuaciones de segundo grado (cuando en la ecuación el máximo exponente a que esta elevada la incógnita es 2) y ecuaciones de tercer grado (el máximo exponente a que se eleva la incógnita es 3).

Como en los casos anteriores también se las resuelve, efectuando las mismas operaciones en ambos miembros.

Por ejemplo:

$$x^2=25$$

Si a ambos miembros lo afectamos con la raíz cuadrada.

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{25}$$

Se observa que se simplificó el índice de la raíz con el exponente de x, quedando

$$x=\sqrt{25} \Rightarrow x=5 \quad \text{y} \quad x=-5$$

Las raíces cuadradas de números positivos siempre tienen doble signo pues los dos resultados $(-5)^2 = 25$ y $(5)^2 = 25$ son iguales.

Verificar estos procedimientos con los siguientes ejercicios.

18) $x^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{25} \Rightarrow x = \sqrt{25}$ $\nearrow \boxed{x = 5}$ $\searrow \boxed{x = -5}$

19) $x^3 = 27 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{27} \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} \Rightarrow \boxed{x = 3}$

20) $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow x = 3^2 \Rightarrow \boxed{x = 9}$

21) $\sqrt[3]{x} = 4 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 4^3 \Rightarrow x = 4^3 \Rightarrow \boxed{x = 64}$

Ejercicios propuestos

1- $x - 8 = 18$
2- $x + 25 = 30$
3- $55 - x = 30$
4- $5x = 20$
5- $\frac{240}{x} = 4$
6- $-x - 5 = 3$
7- $10x - 5 = 6 + 6x$
8- $\frac{x+3}{6} = -5$
9- $\frac{4-3x}{5} = -2x$
10- $\frac{5-3x}{2x} = 6$

Respuestas

1- $x = 18$
2- $x = 5$
3- $x = 25$
4- $x = 4$
5- $x = 60$
6- $x = -8$
7- $x = \frac{11}{4}$
8- $x = -33$
9- $x = -\frac{4}{7}$
10- $x = \frac{1}{3}$

Las ecuaciones en la vida diaria

Hay una serie de problemas que se presentan casi a diario y que se pueden resolver bastante fácilmente si logramos expresarlos de forma que su solución sea equivalente a resolver una ecuación algebraica. El método es simple. En primer lugar debemos escoger la incógnita, construimos la ecuación y finalmente pasamos a resolverla con los métodos a nuestro alcance. Lo principal es aprender, en la práctica, a traducir en términos algebraicos los planteamientos de los problemas. Veamos algunos problemas tipo que se pueden resolver de esa forma.

1) Sea x un número. Entonces, 3 veces ese número menos 25 es igual al duplo del número menos 15. ¿Cuál es el número que satisface estas condiciones?

$$3x - 25 = 2x - 15 \Rightarrow 3x - 2x - \mathbf{25} = 2x - 2x - \mathbf{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 25 = -15 \Rightarrow x - 25 + 25 = -15 + 25 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

2) Un jefe de una pequeña empresa se puede permitir el pagar $\$1553$ al mes en salario. Si la secretaria recibe $\$455$ y la recepcionista recibe dos terceras partes de lo que recibe el contable, ¿Cuánto recibe cada uno? Solución: sea x lo que recibe el contable, entonces la recepcionista recibe $(2/3)x$. La ecuación será:

$$x + \left(\frac{2}{3}\right)x + 455 = 1553$$

$$x + \left(\frac{2}{3}\right)x + 455 = 1553 \Rightarrow \frac{5x}{3} + 455 - 455 = 1553 - 455 \Rightarrow$$

$$\frac{5x}{3} = 1098 \Rightarrow \frac{5x}{\cancel{3}} * \cancel{3} = 1098 * 3 \Rightarrow 5x = 3294 \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}}x = \frac{3294}{5} \Rightarrow \boxed{x = 658{,}80}$$

Luego el contable recibe $\$658{,}80$ y la recepcionista en cambio: $\left(\frac{2}{3}\right)658{,}80 = 439{,}20$. Es decir,$\$439{,}20$

3) El exceso de un número sobre 9 equivale a los dos quintos del número más los siete quinceavos del número menos 5. Hallar el número.

Solución: sea x el número deseado. Planteamos la ecuación, traduciendo en términos simbólicos los datos del problema:

$$x - 9 = \frac{2}{5}x + \frac{7}{15}x - 5$$

$$x - 9 = \frac{2}{5}x + \frac{7}{15}x - 5 \Rightarrow \quad x - 9 = \frac{13}{15}x - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 9 + 9 = \frac{13}{15}x - 5 + 9 \Rightarrow \quad x = \frac{13}{15}x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x = \cancel{15}\frac{13}{\cancel{15}}x + 4 * 15 \Rightarrow \quad 15x = 13x + 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x - 13x = 13x - 13x + 60 \Rightarrow \quad 2x = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x = \frac{60}{2} \Rightarrow \quad \boxed{x = 30}$$

Ecuación de una Recta

La ecuación de una recta es una ecuación de primer grado que tiene la siguiente forma:

$$\boxed{y = ax + b}$$

Donde y ——— Variable Dependiente

x ——— Variable Independiente

a ——— Coeficiente del término Lineal

b ——— Coeficiente del término Independiente

El valor de "a" nos indicará como es la pendiente de la recta. Si el valor de "a" es POSITIVO ⇒ la pendiente tendrá ésta inclinación → /

Si el valor de "a" es NEGATIVO ⇒ la pendiente tendrá ésta inclinación \

El valor de "b" también llamado "ordenada al origen" nos indica el punto donde la recta corta al eje de ordenada "y", es decir la recta corta al eje "y" en el punto $(0\,;b)$.

$x = 0$ $y = b$

Ejemplo: $\boxed{y = 2x + 3}$

$a = 2$ y $b = 3$

¿Como podemos graficar esta recta?

Dado que una recta está conformada por infinitos puntos consecutivos, ubicaremos a solo dos de esos infinitos puntos y luego al unirlos obtendremos la recta.

Veamos como:

El primer punto es el $(0; b)$ $\Longrightarrow$ $(0\,;3)$

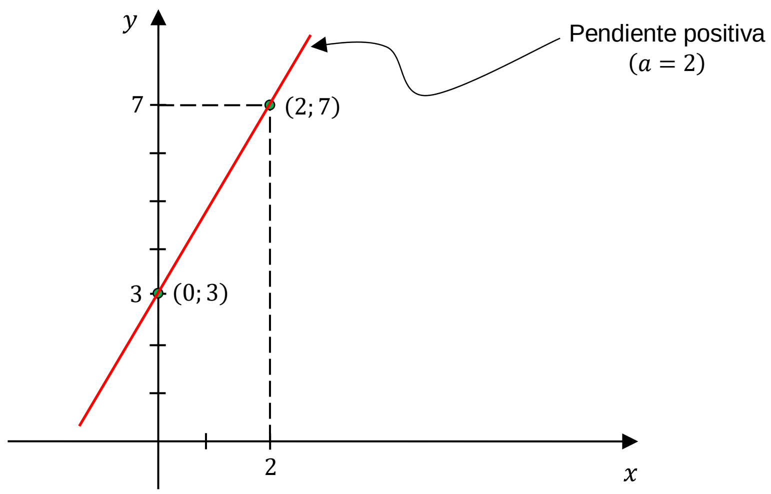
x y

El segundo con un valor cualquiera de x, que nosotros proponemos, encontramos su correspondiente valor de y.

Ejemplo: Si proponemos $x = 2$ $\Longrightarrow$ $y = 2 * 2 + 3$

$y = 7$ $\Longrightarrow$ El punto será el $(2\,; 7)$

Con los puntos $(0; 3)$ y $(2; 7)$ construimos nuestra recta.



Veamos otro ejemplo $\longrightarrow$ $y = -4x + 6$

$\Longrightarrow$ Se tiene primero el punto $(0\,; 6)$

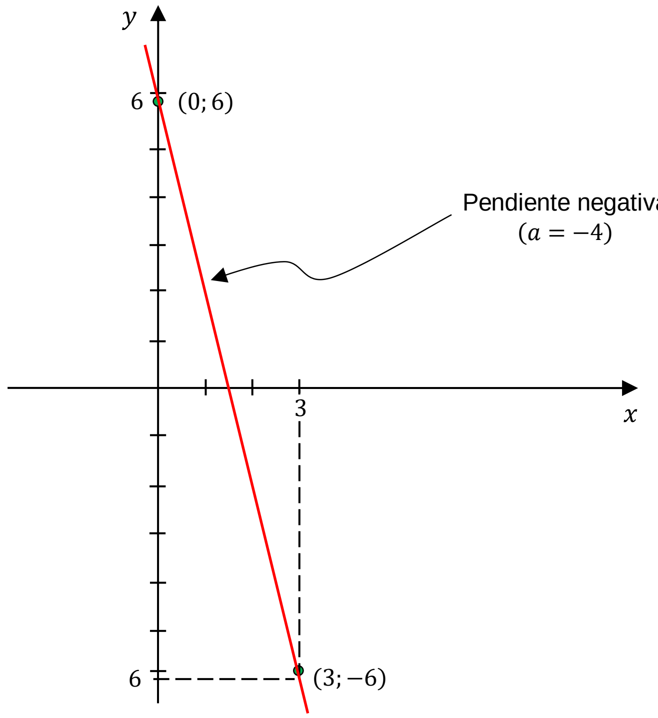
$b = 6$

$x = 0$

Si proponemos por ejemplo $x = 3$ para tener un valor no demasiado grande y así poder representarlos en el gráfico.

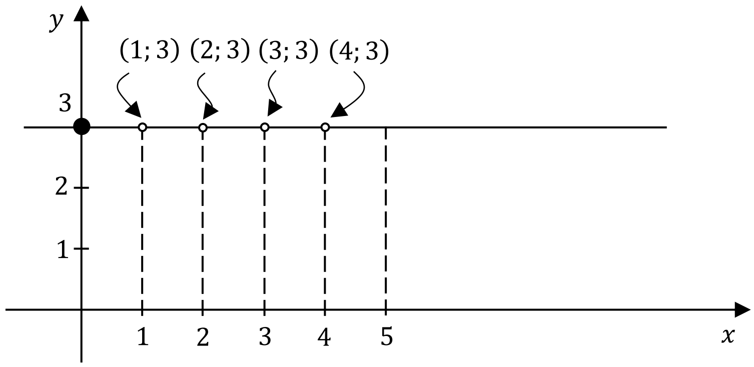
⇨ $y = -4 * 3 + 6 = -6$

⇨ Se obtiene el punto $(3\,;\,-6)$



En la recta se da una situación especial y es cuando la pendiente es nula. Es decir, la recta es paralela al eje "x" (de abscisa)

Ejemplo: $y = 3$



Al estudiar Física se darán ejemplos de situaciones donde se tendrán rectas con pendientes positivas y negativas, como por ejemplo en móviles con velocidades constantes. También rectas con pendientes nulas, como por ejemplo en cuerpos en reposo.

Ecuación de la Parábola

La ecuación de la parábola es una ecuación de segundo grado que tiene la siguiente forma.

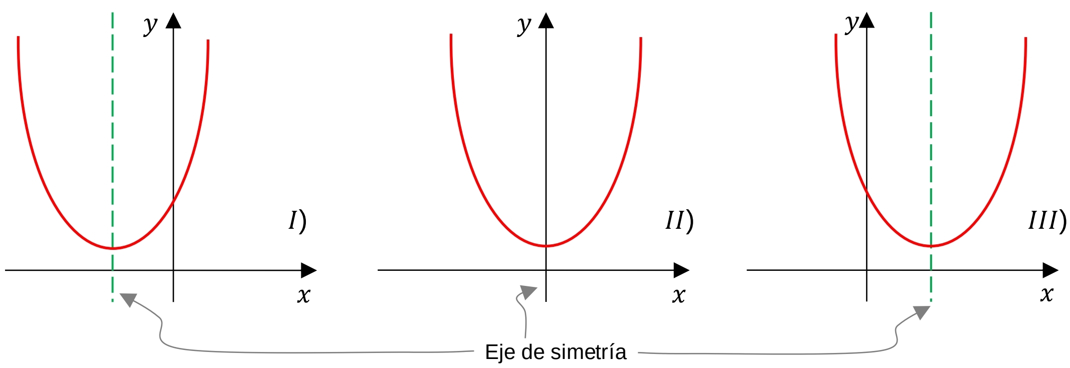
$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Donde
y ——— Variable Dependiente
x ——— Variable Independiente
a ——— Coeficiente del término Cuadrático
b ——— Coeficiente del término Lineal
c ——— Coeficiente del término Independiente

El valor de "a" nos indicará como es la concavidad de la parábola. Si "a" es POSITIVA $\Longrightarrow$ la parábola será cóncava hacia arriba "$\cup$".

Si "a" es NEGATIVA $\Longrightarrow$ la parábola será cóncava hacia abajo "$\cap$".

❖ Una parábola siempre tiene un eje de simetría que puede estar corrido hacia la izquierda, centrado o corrido hacia la derecha, según se observa en la siguiente figura.

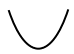


- Si el valor de "b" es cero; $b = 0$ $\Longrightarrow$ estará el eje centrado como en la figura II.
- Si el signo de "a" es igual al signo de "b" el eje estará corrido hacia la izquierda del eje "y" (figura I).
- Si el signo de "a" es distinto al signo de "b" el eje estará corrido a la derecha del eje "y" (figura III).

Ejemplo

$$y = 2x^2 + 4x + 1$$

En este caso $\rightarrow$ $a = 2$, $b = 4$, $c = 1$

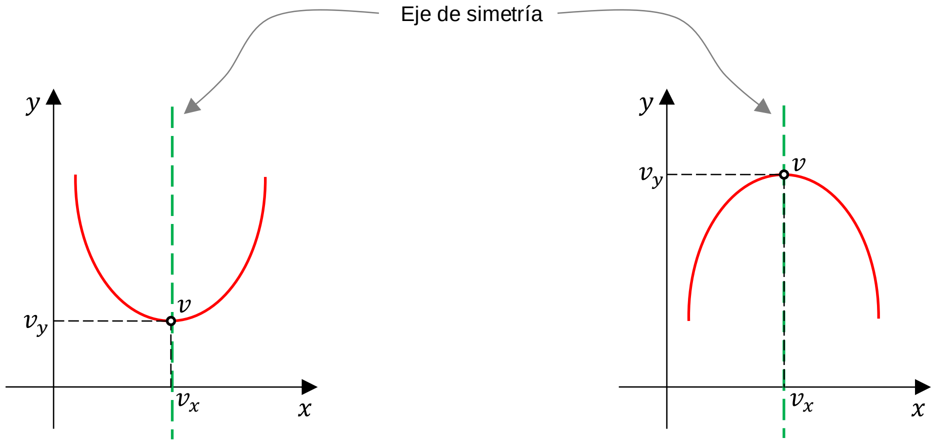
$a = 2 > 0$ $\Longrightarrow$  cóncava hacia arriba.

Signo de $b\ (+)$ igual signo de $a\ (+)$ $\Longrightarrow$ eje de simetría corrido hacia la izquierda.

Al estudiar Física se verán ejemplos de parábolas con concavidad hacia arriba, por ejemplo en móviles con aceleración positiva, y parábolas con concavidad hacia abajo en móviles que tengan aceleración negativa.

Vértice de la parábola

El vértice de la parábola es el punto más bajo o más alto de la misma según su concavidad sea hacia arriba o hacia abajo respectivamente.



Según la figura anterior, el vértice v, tiene componentes v_x en el eje "x" y v_y en el eje "y" entonces se puede decir que $\Longrightarrow$ $v = (v_x; v_y)$.

Hay un método para calcular a los puntos v_x y v_y que para esta introducción matemática solo se dirá como calcularlos, pero no su demostración de porqué se los calcula de esta forma.

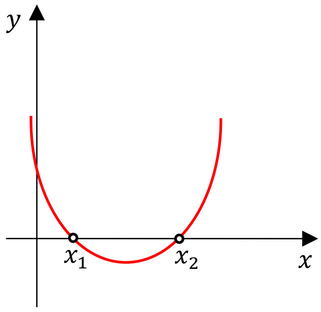
$$\boxed{v_x = \frac{-b}{2a}} \quad \text{y} \quad \boxed{v_y = \frac{-b^2}{4a} + c}$$

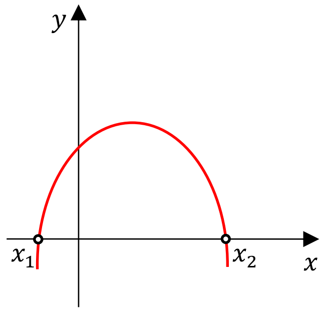
Se advierte que el vértice es el punto más elevado o más bajo de la parábola según sea ella cóncava hacia abajo o hacia arriba respectivamente. Además, por el vértice pasa el eje de simetría de la parábola, que es el eje que divide a la parábola en dos partes iguales en un lado o en el otro (izquierda o derecha).

Raíces de la parábola

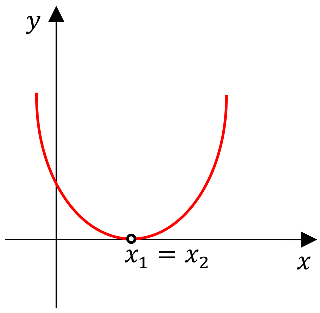
Se llama raíces de la parábola a los puntos de la misma donde se intersectan con el eje de abscisa ("x"). Los llamaremos para nuestro estudio x_1 y x_2. Aquí según la parábola se pueden presentar tres casos.

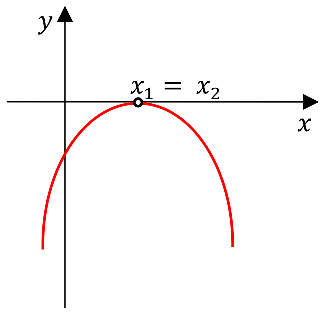
- Primer caso: La parábola corta al eje "x" en 2 (dos) puntos x_1 y x_2.



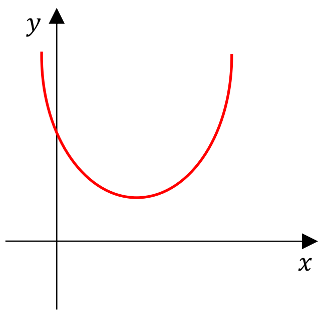


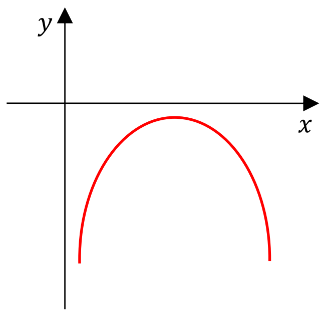
- Segundo caso: La parábola corta el eje "x" en un solo punto ⇨ $x_1 = x_2$.





- Tercer caso: La parábola no corta el eje "x" en ningún punto.





Forma de conocer los valores de las raíces:

Hay un método que también para esta introducción matemática no se dará su explicación de donde se la obtiene a la ecuación puesto que este no es un texto netamente matemático.

$$x_{1-2} = x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El valor de "$b^2 - 4ac$" se lo denomina discriminante $\Rightarrow$ D.

$D = b^2 - 4ac$; si este valor es negativo la parábola no corta al eje de abscisa (eje "x"). O sea que la parábola no tiene raíces.

Ejercicios:

❖ Hay que calcular los puntos de la parábola siguiendo un criterio. Por ejemplo podemos comenzar primero encontrando el valor del vértice, luego calcular las raíces. Si la parábola no corta el eje "x", proponer dos o tres valores de x a la izquierda y a la derecha x_v y calcular los valores de y correspondientes.

Otro punto que siempre marcamos es el punto donde la parábola corta al eje $y = c$ $\Rightarrow$ $x = 0$.

Ejemplos:

$y = x^2 + x + 2$

$y = -2x^2 + 3x$

$y = -x^2 + 2x - 2$

$y = x^2 - 3x - 4$

$y = x^2 - 3x - 4$

➢ $y = x^2 + x + 2 \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{cases}$

1º) Calculamos el vértice $\Rightarrow$ $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2*1} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$

$$y_v = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{1^2}{4*1} + 2 = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{-1+8}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

$\Rightarrow$ $v = (-0{,}5\,;1{,}75)$

2º) Cálculo de las raíces

$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4*1*2}}{2*1}$$

Dado que $(1^2 - 4*1*2) = -7$ entonces no hay raíces, por lo tanto no hace falta seguir calculando.

3º) En $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = 2 \quad ; \quad (y = c)$

4º) Dos puntos a la derecha de x_v.

$x = 1 \Rightarrow y = 1^2 + 1 + 2 = 4$

$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 + 2 + 2 = 8$

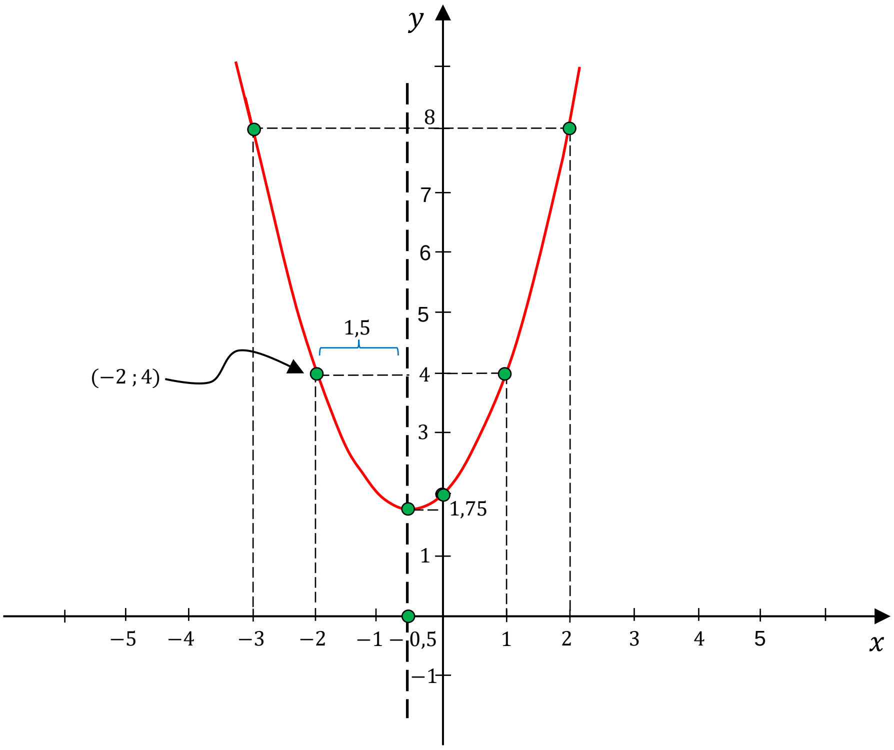
5°) Grafiquemos con los puntos obtenidos

$v = (-0{,}5\,;1{,}75)$

Raíces: no presenta

Ordenada al origen $(0\,;2)$

Y los puntos ⇨ $(1\,;4)$ y $(2\,;\,8)$



Si a x_v se le resta 1,5 se obtiene $x = -2$ (su punto de simetría en $y = 4$)

⇨ $(-2\,;\,4)$.

➢ $y = -2x^2 + 3x$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{cases}$

1º) Calculamos el vértice $\Rightarrow$ $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2*(-2)} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$$y_v = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{3^2}{4*(-2)} + 0 = -\frac{9}{-8} = 1{,}12$$

$\Rightarrow$ $v = (0{,}75\,;1{,}125)$

2º) Cálculo de las raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4*(-2)*0}}{2*(-2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9}}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-3+3}{-4} = 0$$

$$x_2 = \frac{-3-3}{-4} = \frac{-6}{-4} = 1{,}5$$

3°) Para $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = c = 0$

4°) Dos puntos a la derecha de x_v

$x = 1$ $\Rightarrow$ $y = -2*1^2 + 3*1 = -2 + 3 = \underline{1 = y}$

$x = 2$ $\Rightarrow$ $y = -2*2^2 + 3*2 = -6 + 6 = \underline{-2 = y}$

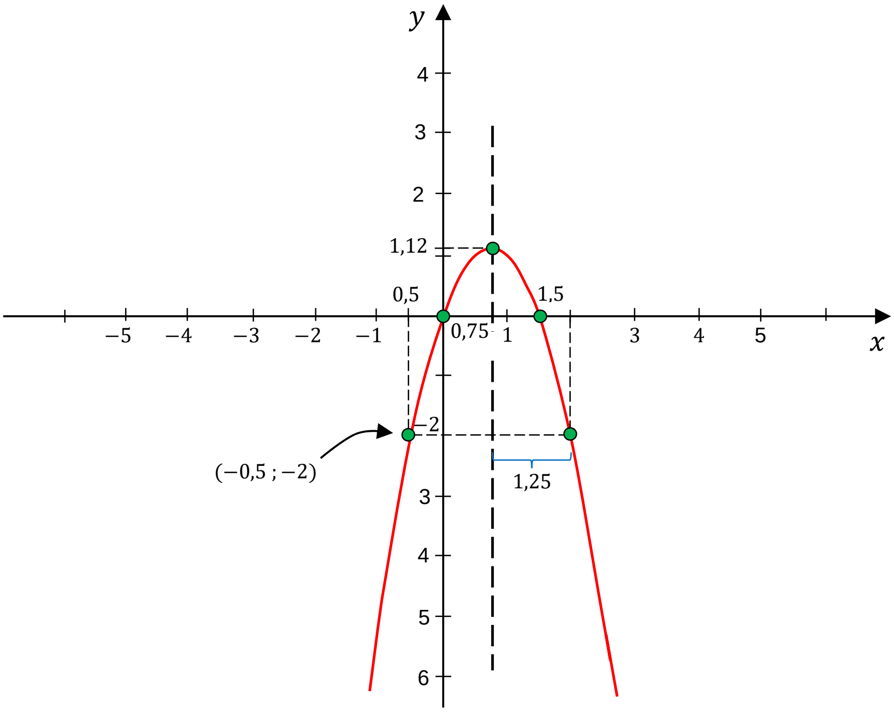
5°) Grafiquemos con los puntos obtenidos

$v = (0{,}75\,;1{,}12)$

Raíces $(0;0)$ y $(1{,}5\,;0)$

Ordenada al origen $(0\,;0)$

Y los puntos $\Rightarrow$ $(1\,;1)$ y $(2\,;\,-2)$



Si a x_v se le resta 1,25 se obtiene $x = -0{,}5$ (su punto de simetría en $y = -2$)

$\Longrightarrow$ $(-0{,}5\ ;\ -2)$.

➢ $y = -x^2 + 2x - 2$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$

1º) Calculamos el vértice $\Rightarrow x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2*(-1)} = -\dfrac{2}{-2} = 1$

$$y_v = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{2^2}{4*(-1)} - 2 = -\frac{4}{-4} - 2 = 1 - 2 = -1$$

$\Rightarrow$ $v = (1\,;-1)$

2º) Cálculo de las raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4*(-1)*(-2)}}{2*(-1)} = \frac{-12 \pm \sqrt{-4}}{-2} = \text{ sin solución}$$

Dado que $\sqrt{-4}$ no tiene solución entonces no hay raíces, por lo tanto no hace falta seguir calculando.

3°) Para $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = c = -2$

4°) Dos puntos a la derecha de x_v

$x = 1 \Rightarrow$ $y = -1^2 + 2*1 - 2 = \underline{-1 = y}$

$x = 2 \Rightarrow$ $y = -2^2 + 2*2 - 2 = -4 + 2 = \underline{-2 = y}$

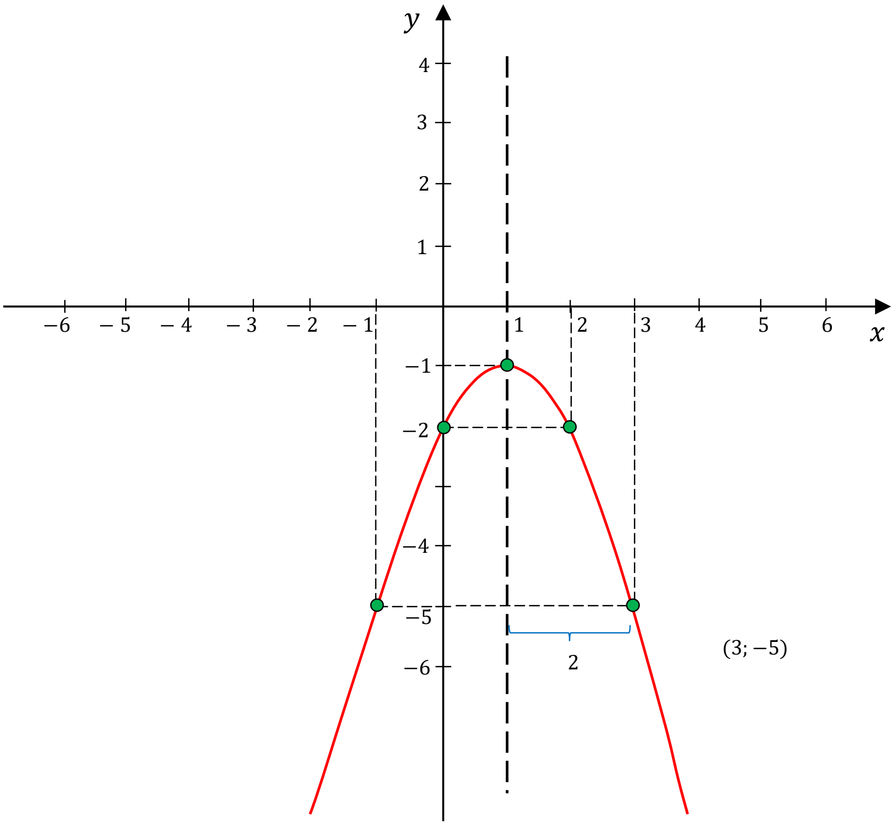
5º) Grafiquemos con los puntos obtenidos

$v = (0\,;-2)$

Raíces: no presenta

Ordenada al origen $(0\,;-2)$

Y los puntos $\Rightarrow$ $(1\,;-1)$ y $(2\,;\,-2)$



Si a x_v se le resta 2 se obtiene $x = -1$ (su punto de simetría en $y = -5$)

$\Rightarrow$ $(-1\,;\,-5)$.

- $y = x^2 - 3x - 4$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -4 \end{cases}$

1º) Calculamos el vértice $\Rightarrow$ $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-3)}{2*1} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

$$y_v = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{(-3)^2}{4*1} + (-4) = -\frac{9}{4} - 4 = \frac{-9-16}{4} = -6{,}25$$

$\Rightarrow$ $v = (1{,}5\,; -6{,}25)$

2º) Cálculo de las raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{3^2 - 4*1*(-4)}}{2*1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3+5}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

3°) Para $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = c = -4$

4°) Dos puntos a la derecha de x_v

$x = 1 \Rightarrow$ $y = 1^2 - 3*1 - 4 = \underline{-1 = y}$

$x = 2 \Rightarrow$ $y = 2^2 - 3*2 - 4 = \underline{-6 = y}$

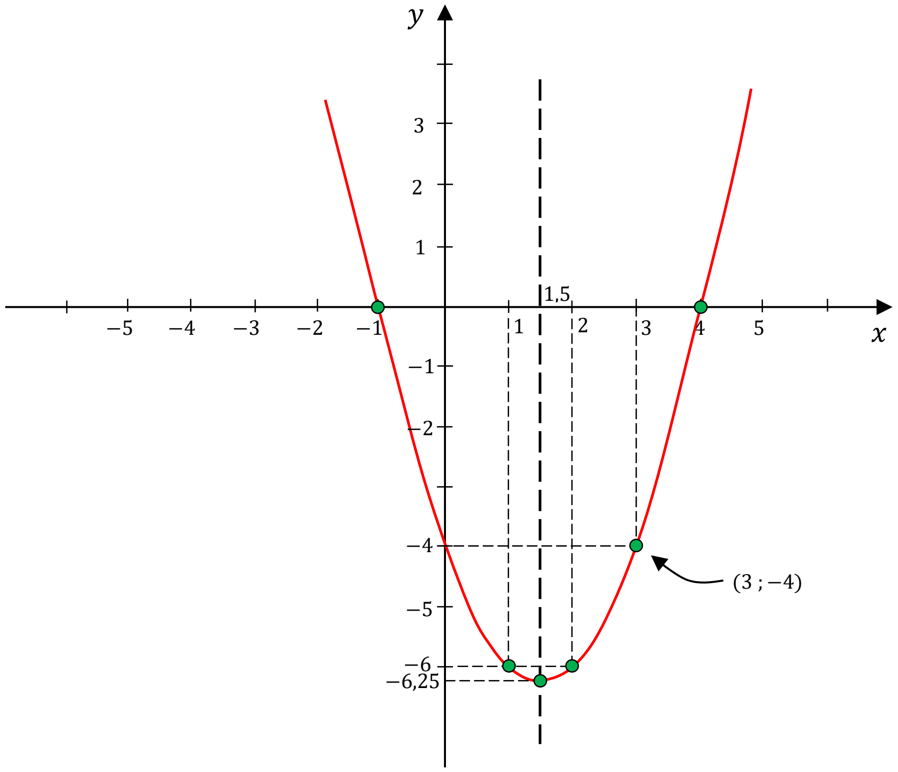
5°) Grafiquemos con los puntos obtenidos

$v = (1{,}5\,;\ -6{,}25)$

Raíces $(-1\,;0)$ y $(4\,;0)$

Ordenada al origen $(0\,;-4)$

Y los puntos $\Rightarrow$ $(1\,;-6)$ y $(2\,;\,-6)$



Si a x_v se le suma 1,25 se obtiene $x =\ 3$ (su punto de simetría en $y = -4$)

$\Rightarrow$ $(3\,;\,-4)$.

➢ $y = x^2 - x + 3 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$

1º) Calculamos el vértice $\Rightarrow$ $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2*1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$$y_v = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{(-1)^2}{4*1} + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = \frac{-1+12}{4} = \frac{11}{4} = 2{,}75$$

$\Rightarrow$ $v = (0{,}5\,;2{,}75)$

2º) Cálculo de las raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4*1*3}}{2*1} =$$

Dado que $((-1)^2 - 4*1*3) = -11$ entonces no hay raíces, por lo tanto no hace falta seguir calculando.

3°) Para $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = c = 3$

4°) Dos puntos a la derecha de x_v

$x = 1 \Rightarrow y = 1^2 - 1 + 3 = \underline{3 = y}$

$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 - 2 + 3 = \underline{5 = y}$

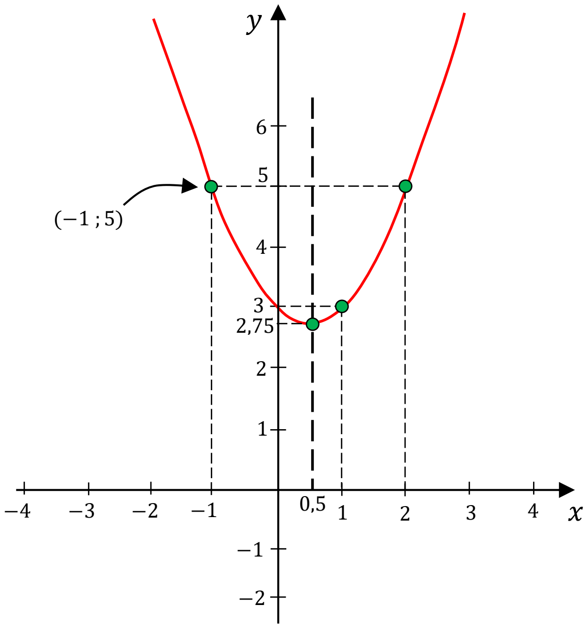
5°) Grafiquemos con los puntos obtenidos

$v = (0{,}5\,;\ 2{,}75)$

Raíces: No tiene

Ordenada al origen $(0\,;3)$

Y los puntos $\Rightarrow$ $(1\,;3)$ y $(2\,;\,5)$



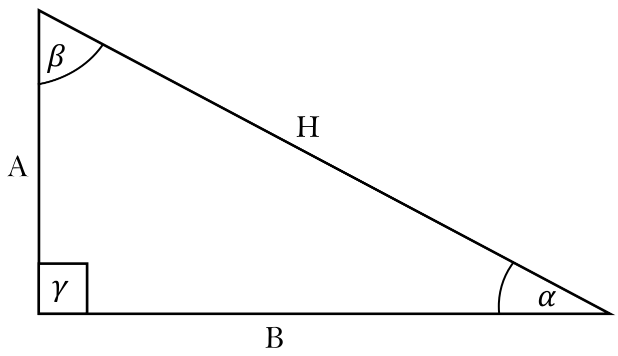
Si a x_v se le resta 1,5 se obtiene $x = -1$ (su punto de simetría en $y = 5$)

$\Rightarrow$ $(-1\,;\,5)$.

Nociones de Trigonometría

La trigonometría, como “tema” matemático, es una herramienta bastante utilizada en Física, es por ello que en este curso se pretenda dar ciertas nociones, o “refrescar” conocimientos adquiridos en los distintos colegios secundarios.

La trigonometría es una rama de la matemática que estudia las relaciones existentes entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, entre los ángulos de este y entre los lados y ángulos del mismo.



Podemos decir, en base a estos conceptos, que dicho triangulo tiene:

- El lado H es la hipotenusa del triángulo.
- El lado A es el cateto opuesto al ángulo α o cateto adyacente para el ángulo β.
- El lado B es el cateto adyacente al ángulo α o cateto opuesto para el ángulo β.

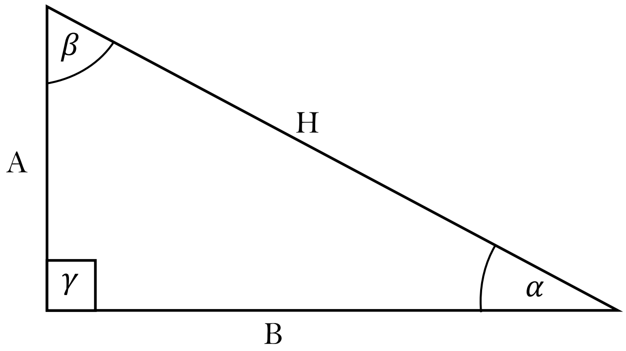
Si en el triángulo de la figura conociéramos la longitud de dos de sus lados (podrían ser sus catetos, o un cateto y la hipotenusa) y quisiéramos conocer el tercer lado, nos valemos para resolver este tipo de problemas con el **teorema de Pitágoras**.

Teorema de Pitágoras

El **teorema de Pitágoras**, es un teorema que nos permite calcular la longitud de un lado de un triángulo (catetos o hipotenusas) conociendo el valor de la longitud de dos de ellos (cateto o hipotenusa).

Mediante la siguiente relación $\Longrightarrow$ $\boxed{H^2 = A^2 + B^2}$ o $H = \sqrt{A^2 + B^2}$

Cálculo de los ángulos interiores de un triángulo



Si en el triángulo de la figura, conocemos dos de sus ángulos se puede averiguar el valor del tercero.

Como en todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es igual a 180º, entonces es fácil conocer el valor del tercer ángulo conociendo el valor de dos de ellos.

Ejemplo:

Si $\alpha = 30° \Rightarrow \quad \beta = 60°$

$$180° = \alpha + \beta + 90° \quad \Rightarrow \quad \beta = 180° - 90° - \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 60°}$$

Funciones trigonométricas

Las relaciones existentes entre las medidas de los lados (catetos e hipotenusa), y los ángulos, definen las llamadas **"FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS"**. En este curso veremos algunas de estas, como ser:

SENO, el COSENO y la TANGENTE de un ángulo.

Si por ejemplo este ángulo fuese α, se tendría.

Seno del ángulo α $(\operatorname{sen}\alpha)$ se lo define como: el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud de la hipotenusa, aclarándose que ambas deben expresarse en las mismas unidades de longitud.

El coseno del ángulo α $(\cos\alpha)$al cociente entre la longitud del cateto adyacente al ángulo α y la longitud de la hipotenusa.

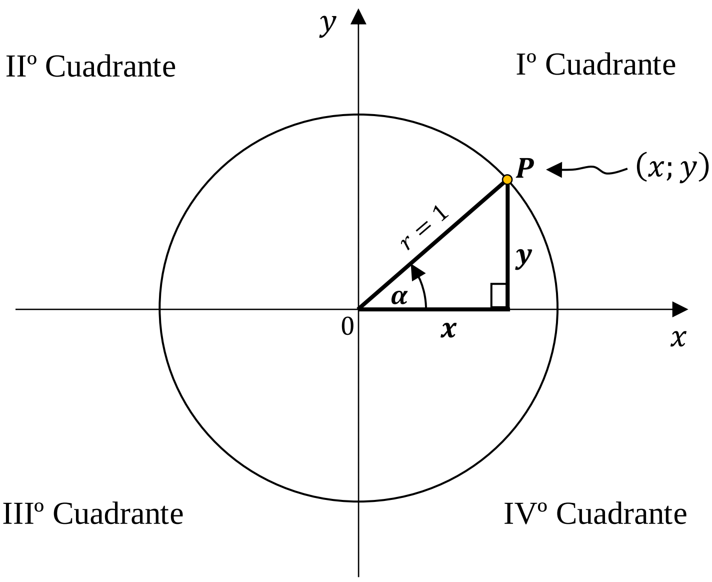
Tangente al ángulo α $(\operatorname{tg}\alpha)$ es el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud del cateto adyacente.

Se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cat\ op}{hip} = \frac{A}{H} \qquad ; \qquad \cos\alpha = \frac{cat\ ady}{hip} = \frac{B}{H} \qquad ; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{cat\ op}{cat\ ady} = \frac{A}{B}$$

Círculo Trigonométrico

Si dibujamos una circunferencia como la de la figura, ésta tiene su radio igual a la unidad (uno). Esta circunferencia en un plano cartesiano $(x; y)$ tiene su centro en $(0; 0)$. Si ubicamos en la misma un punto cualquiera "P" se observará que este punto, tiene coordenadas $(x; y)$.



Esta circunferencia se utiliza con el fin de estudiar las razones trigonométricas y funciones trigonométricas, mediante la relación (cociente) entre los catetos entre sí y entre catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo que siempre se forma entre la hipotenusa (r) y los catetos "x" (abscisa) e "y" (ordenada).

- Las funciones trigonométricas se las identifica de la siguiente manera:

$$\boxed{\text{seno}\, \alpha = \frac{ordenada\ del\ punto\ P}{Radio} = \frac{y}{r}}$$

Se hace notar como el valor del radio es $r = 1$ y "y" tienen en cualquier punto de cualquiera de los cuatro cuadrantes un valor comprendido entre -1 y 1 $(-1 \leq y \ \leq 1)$.

$$\boxed{\text{coseno}\, \alpha = \frac{abscisa\ del\ punto\ P}{Radio} = \frac{x}{r}}$$

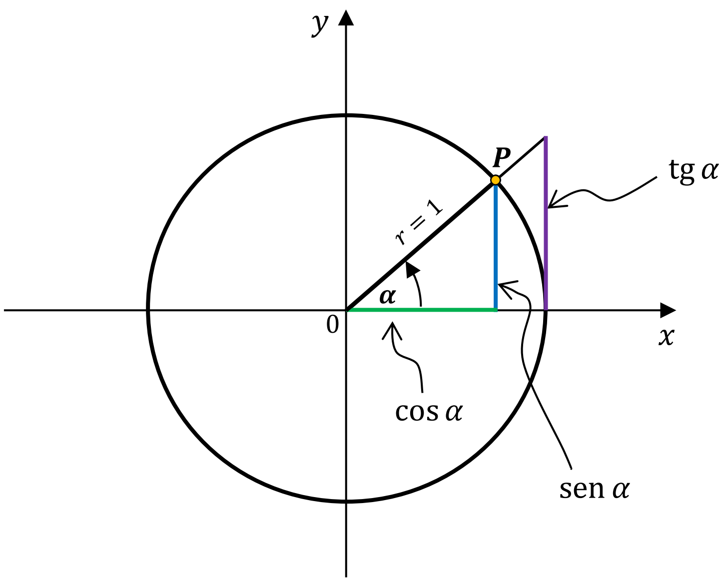
Aquí también podemos decir que el valor de "x" (la abscisa) está comprendido (en cualquiera de los cuadrantes) -1 y 1 $(-1 \leq x \leq 1)$.

$$\boxed{\text{tangente}\, \alpha = \frac{ordenada\ del\ punto\ P}{abscisa\ del\ punto\ P} = \frac{y}{x}}$$

Cabe aclarar que las funciones referidas a la cotangente, secante y cosecante del ángulo α en esta introducción a la Física Universitaria no la realizaremos porque consideraremos que a estas se las analiza con mayor profundidad en libros específicos de Matemática y con las funciones expuestas seno α, coseno α y tangente α son suficientes a los fines de los temas que se estudiaran en nuestros primeros pasos por la Física.

Realicemos un análisis de estas tres funciones en cada uno de los cuatro cuadrantes del plano (x, y) donde se encuentra la circunferencia.

Si α pertenece al PRIMER CUADRANTE se tiene $\mathbf{0}° \leq \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{90}°$



En el gráfico I, se observan los segmentos que representan al seno, coseno y tangente de un ángulo α que pertenece al primer cuadrante.

Ejemplos numéricos:

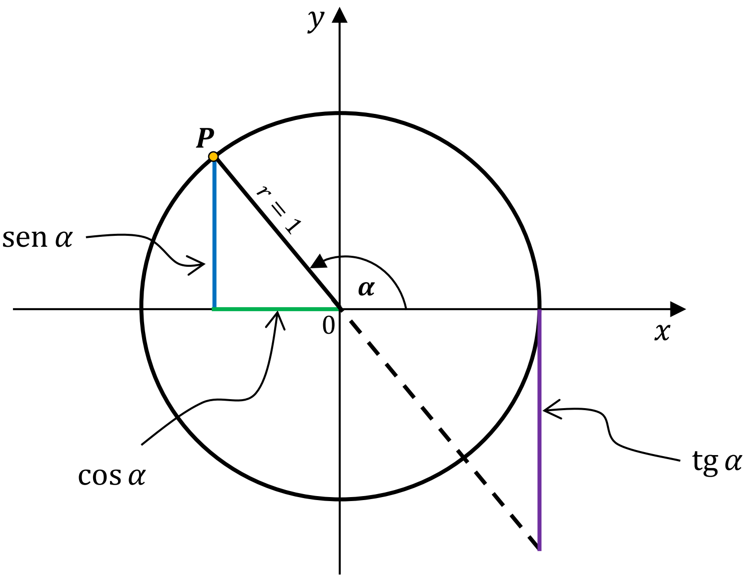
$\boxed{\mathrm{seno}\,30° = 0{,}5}$ $\Rightarrow$ esto quiere decir que si el radio (hipotenusa del triángulo) es igual a 1, su seno es igual a $0{,}5$ (su cateto opuesto) que es la ordenada al punto.

$\boxed{\cos 30° = 0{,}86}$ $\Rightarrow$ La abscisa del punto P (cateto adyacente del triángulo) es un valor comprendido entre 1 (valor máximo para $\alpha = 0$) y 0 para $\alpha = 90°$.

$\boxed{\mathrm{tg}\,30° = 0{,}57}$ $\Rightarrow$ Es un valor mayor o igual a cero y menor que infinito.

Los ángulos que se aproximan a $90°$ tienen valor de tangente muy grandes puesto que el segmento que lo representa en la figura tiene un tamaño considerado.

Si α pertenece al SEGUNDO CUADRANTE se tiene $\mathbf{90° \leq \alpha \leq 180°}$



<u>Ejemplos:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{seno}\,130° = 0{,}76 \\ \cos 130° = -0{,}64 \\ \mathrm{tg}\,130° = -1{,}19 \end{array}\right\}$$ Constátelos con la ayuda de una calculadora

En este caso se observa que el valor del seno tiene un valor positivo (ordenada positiva) y el coseno valor negativo (abscisa negativa), la tangente tiene un valor negativo.

Aquí podemos sintetizar diciendo que:

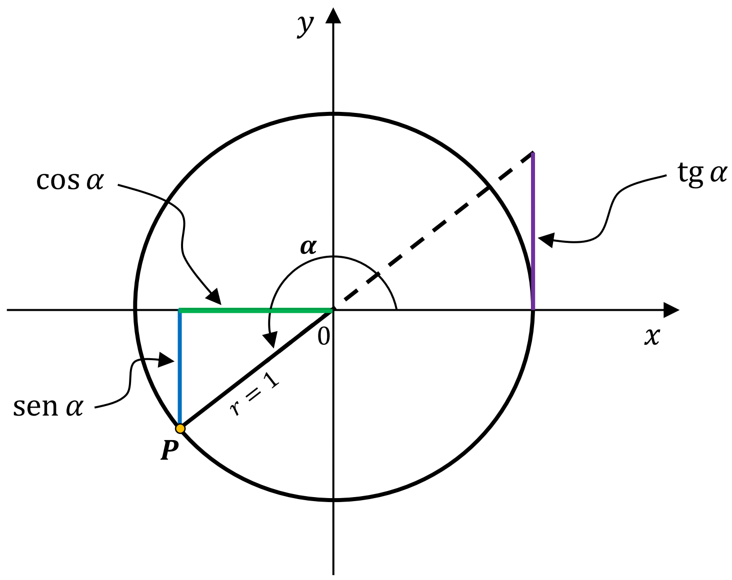
$$90° \leq \alpha \leq 180°$$

$$0 \leq sen\,\alpha \leq 1$$

Si $\alpha = 180°$ $\longrightarrow$ $-1 \leq cos\,\alpha \leq 0$ $\longleftarrow$ Si $\alpha = 90°$

$$0 \leq tg\,\alpha \leq -\infty$$

Si α pertenece al TERCER CUADRANTE se tiene $\mathbf{180°} \leq \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{270°}$



<u>Ejemplos:</u>

$\mathrm{seno}\,230° = -0{,}76$

$\cos 230° = -0{,}64$

$\mathrm{tg}\,230° = 1{,}19$

Síntesis

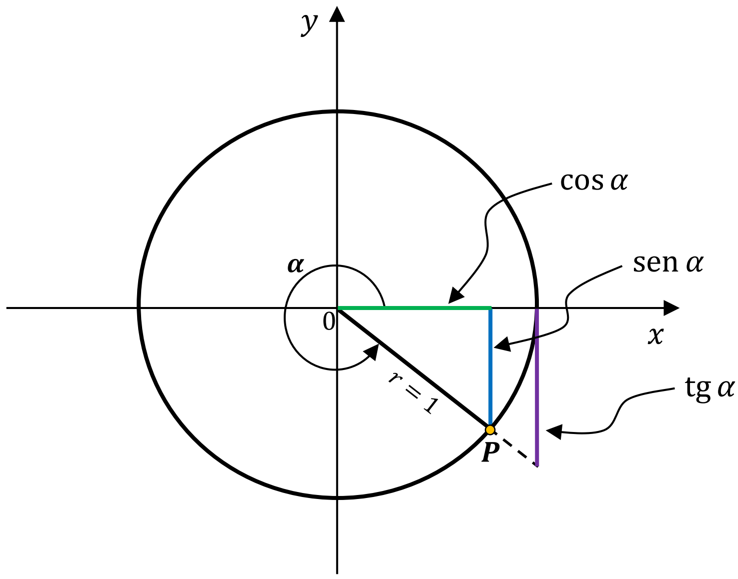
$$180° \leq \alpha \leq 270°$$

$$-1 \leq sen\,\alpha \leq 0$$

$$\alpha = 270° \qquad -1 \leq cos\,\alpha \leq 0 \qquad \alpha = 180°$$

$$0 \leq tg\,\alpha \leq \infty$$

Si α pertenece al CUARTO CUADRANTE se tiene $\mathbf{270°} \leq \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{360°}$



<u>Ejemplos:</u>

$\text{seno}\,320° = -0{,}64$

$\cos 320° = 0{,}76$

$\text{tg}\,320° = -0{,}83$

Síntesis:

$$270° \leq \alpha \leq 360°$$

$$0 \leq sen\,\alpha \leq -1$$

$$\alpha = 360° \qquad 0 \leq cos\,\alpha \leq 1 \qquad \alpha = 270°$$

$$0 \leq tg\,\alpha \leq -\infty$$

A los alumnos:

Se recomienda que los temas desarrollados se los lea y estudien a conciencia sabiendo que los mismos serán empleados con mucha frecuencia al abordar cualquier temática en distintas asignaturas, fundamentalmente en Física.

Tanto los ejercicios resueltos como los propuestos, repetirlos hasta entenderlos con claridad.

Bibliografía

Carlos Tapia - Nelly Vázquez de Tapia – Alicia Tapia: “MATEMATICA 3”. Editorial Ángel Estrada. Buenos Aires (1992).

Carmen Chávez Reyes – Adriana León Quintanar: “LA BIBLIA DE LAS MATEMATICAS”. Editorial Alfatemática. España (2003).

Ángel Rossi. “Curso Aprestamiento a la Física Universitaria”. Programa de Educación Continua de la Universidad Nacional de Santiago del Estero (1998).

Manuel Figueroa – Recuerdo Guzmán: “Aritmética y álgebra”. Editorial Firmas Press (2010)