E-Book ISBN 978-987-1676-45-3.
Fecha de catalogación: 19/12/2014.

¡Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad!

Albert Einstein

INTRODUCCIÓN

Funciones Reales constituye la segunda Serie Didáctica elaborada en la Cátedra de Cálculo Diferencial e Integral.

La temática central de la misma son las Funciones Reales o Funciones Escalares, noción clave en el estudio del Cálculo.

En su elaboración se tuvieron en cuenta dos aspectos esenciales: Brindar al estudiante, en primer lugar, una visión de todos aquellos conceptos que hacen al concepto de Funciones Escalares, como son los Números Reales; y en segundo lugar, presentar un amplio espectro de situaciones relacionadas con la problemática específica de las Ciencias Forestales, donde el concepto tiene utilidad.

En este contexto, la temática involucra la noción de Modelo Matemático como una herramienta que permite describir, explicar y predecir fenómenos y procesos de distintas áreas, específicamente, en este caso, aquellas ligadas a las Ciencias Forestales.

Está dirigida a todos los estudiantes de la Facultad de Ciencias Forestales y a aquellos profesionales de las Ciencias Forestales que necesiten de estos conceptos.

Lic. Elsa Ibarra de Gómez

Octubre de 2007

INDICE

I.-NOCIONES PRELIMINARES

I.-NOCIONES PRELIMINARES

I.1.-El Sistema de los Números Reales

Las propiedades fundamentales de las operaciones + y **.** , definidas en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, no lo caracterizan totalmente. Con esto queremos decir que existen otros cuerpos (como el cuerpo de los números complejos, por ejemplo). Si en $\mathbb{R}$ se consideran, además, las propiedades de orden y la de continuidad, $\mathbb{R}$ queda completamente definido o caracterizado; esto es, $\mathbb{R}$ es el único cuerpo ordenado y continuo.

I.2.-Propiedades de Orden.

Para establecer las propiedades de orden en $\mathbb{R}$ comenzamos aceptando que existe un subconjunto no vacío $\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{R}$, cuyos elementos se llaman números positivos, tal que:

O_1:. $\forall a, \forall b: \left(a \in \mathbb{R}^+ \wedge\ b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}^+ \wedge\ a \bullet b \in \mathbb{R}^+ \right).$

$$\forall a: \left(a \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 0 \veebar a \in \mathbb{R}^+ \veebar -a \in \mathbb{R}^+ \right).$$

O_2: $0 \notin \mathbb{R}^+$

O_3: $\left(a \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge a \notin \mathbb{R}^+ \right) \Rightarrow -a \in \mathbb{R}^+$

Las dos propiedades anteriores permiten ordenar los elementos de $\mathbb{R}^+$

Diremos que "a es mayor que b" y pondremos a>b si y sólo si a+(-b)$\in \mathbb{R}^+$

En particular, a>0 $\Leftrightarrow$ a-0=a$\in \mathbb{R}^+$

-Se define luego la relación de "menor", simbolizada con "<":

$a < b \Leftrightarrow b > a.$

- También puede definirse la relación mayor o igual, simbolizada con "$\geq$", de la siguiente manera:

$$a \ \geq\ b \Leftrightarrow a > b \veebar a = b.$$

Hasta aquí caracterizamos a $\mathbb{R}$ como un cuerpo conmutativo y ordenado.

-Si además de las propiedades estudiadas consideramos la propiedad de continuidad, entonces $\mathbb{R}$ queda completamente definido y caracterizado; es decir, existe un único cuerpo ordenado y continuo: $\mathbb{R}$.

I.3.-Propiedad de Continuidad

Esta propiedad caracteriza especialmente al conjunto $\mathbb{R}$, ya que $\mathbb{R}$ también es un cuerpo ordenado.

Corresponde dar previamente la definición de cotas y extremos de conjuntos ordenados, pues la propiedad de continuidad se refiere especialmente a conjuntos acotados.

Cota superior: *k* es una cota superior de un conjunto C de números reales si y solo sí k es un número que no es superado por ningún elemento del conjunto, o sea:

k es una cota superior de $C \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x : \left(x \in C \Rightarrow x \leq k \right)$.

Definición: un conjunto está *acotado superiormente*, si y solo sí tiene cota superior.

Definición: se llama conjunto *mayorante* de C al conjunto de todas las cotas superiores del mismo.

Ejemplo 1.

$\mathbb{R}^{-}$ está acotado superiormente, ya que cualquier numero no negativo es una cota superior para ese conjunto.

Ejemplo 2.

$A = \left\{ x / \ x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x < 5 \right\}$, está acotado superiormente ya que cualquier numero mayor o igual que 5 es una cota superior para A.

Propiedad: Si un conjunto tiene una cota superior, tiene infinitas cotas superiores.

- En el *ejemplo 1*, el número real cero (0) es una cota para el conjunto de los números reales negativos, pues si x es cualquier número negativo resulta x < 0. Es obvio que cualquier número real a $>$ 0 es también una cota para $\mathbb{R}^-$, pues si x $<$ 0 y a $>$ 0 $\Rightarrow$ x $<$ a.

- $\mathbb{R}$ no esta acotado superiormente pues para cualquier número real k siempre es posible encontrar otro número real x / x $>$ *k*.

Cota inferior: *h* es cota inferior de un conjunto C de números reales, si y solo sí h es un número real que no supera a ningún elemento de C

h es una cota inferior de $C \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x: \left(x \in C \Rightarrow x \geq h \right)$.

Definición:

Un conjunto esta *acotado inferiormente*, si y solo sí tiene cota inferior.

Definición:

Se llama conjunto *minorante* del conjunto C al conjunto de todas las cotas inferiores.

Ejemplo

El conjunto $A = \left\{ x / x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \right\}$, está acotado inferiormente, pues el cero (0) y todos los números menores que cero son cotas inferiores de A.

Propiedad:

Si *h* es cota inferior de $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$, entonces cualquier número real menor que *h* es también cota inferior.

Extremo superior (cota superior mínima ó supremo)

Definición:

s es un extremo superior de un conjunto C de números reales si y solo sí:

i) s es cota superior de C y

ii) si k es cualquier cota superior de C, entonces s $\leq$ k.

Ejemplo

El cero (0) es el extremo superior de $\mathbb{R}^-$, pues es la menor cota superior.

Observación: un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ de números reales tiene máximo, si tiene extremo superior y éste pertenece al conjunto.

Extremo inferior *(ínfimo ó cota inferior máxima)*

Definición:

s es un extremo inferior de un conjunto C de números reales si y solo sí:

i) s es cota inferior de C y

ii) si h es cualquier cota inferior de C, entonces h $\leq$ s.

Observación: un conjunto C de números reales tiene mínimo, si tiene extremo inferior y éste pertenece al conjunto.

Conjunto Acotado

Un conjunto esta acotado si y solo sí admite cota superior y cota inferior.

Ejemplo

1) Sea $A = \{ x / x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 5 \}$.

a) 0, -1, $-\sqrt{2}$: son cotas inferiores de A.
b) Cero (0) es el ínfimo y mínimo
c) 5, 6, 7,…. Son cotas superiores de A.
d) No tiene máximo.

Propiedad:

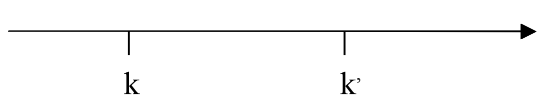
El supremo es único.

Prueba (por el absurdo)

Sea k el extremo superior de un conjunto A.

Sea k otro extremo superior de A.

Como k y k son números reales distintos, supongamos que k $<$ k. **(1)**



Como k es extremo superior, también es cota superior. Además k es extremo superior y por lo tanto es la menor cota superior; luego $k <$ k, lo que contradice en (1).

El extremo superior puede o no pertenecer al conjunto.

Definición:

Un conjunto de números reales tiene máximo, si tiene extremo superior (0 supremo) y éste pertenece al conjunto.

Ejemplo

$\mathbb{R}^-$ no tiene máximo, pero $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ tiene máximo, que es el cero.

Definición:

Un conjunto de números reales tiene mínimo, si y solo sí tiene ínfimo y éste pertenece al conjunto.

Ejemplo

$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tiene mínimo, que es el cero.

La propiedad del supremo

Es adecuada aquí la siguiente pregunta:

¿Todos los conjuntos acotados superiormente, tienen supremo?

En el sistema de los números reales todos los conjuntos de tal tipo tienen supremo.

En realidad esto es precisamente lo que dice la siguiente propiedad.

Propiedad:

Si S es un conjunto no vacío de números reales, superiormente acotado, entonces tiene supremo.

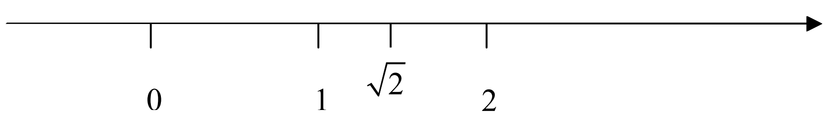
Es decir que cualquier conjunto no vacío de números reales, que admite una cota superior, tiene *cota superior mínima,* que es también un número real.

Observación: esta propiedad, característica de los números reales, no se verifica para el conjunto de los números $\mathbb{Q}$.

En efecto, existen conjuntos de números racionales, acotados superiormente, cuyo extremo no es un número racional. Para probar que la propiedad de continuidad no es valida para $\mathbb{Q}$, usamos un contraejemplo.

* Sea $A = \left\{ x / \, x \in \mathbb{Q} \wedge \left(x \leq 0 \vee x^2 \leq 2 \right) \right\}$, números racionales negativos, cero y los racionales positivos cuyo cuadrado es menor o igual que dos.

- A $\neq$ 0.
- A esta acotado superiormente por cualquier número racional positivo cuyo cuadrado es mayor o igual que dos.



El supremo de este conjunto debería ser un número cuyo cuadrado es igual a dos, o sea, $\sqrt{2};$ que no es un número racional.

Luego A no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

* Sea $A = \left\{ x / \, x \in \mathbb{R} \wedge \left(x \leq 0 \vee x^2 \leq 2 \right) \right\}$.

Supremo de A = $\sqrt{2};$ y $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Utilizando la propiedad del supremo se puede demostrar que si un conjunto no vacío de números reales tiene cota inferior, entonces tiene ínfimo

I.4.- Valor Absoluto

Definición:

Se llama valor absoluto de un número real a, al mismo número si a es positivo o cero; y a su opuesto si es negativo. Es decir:

$$|a| = \begin{cases} a, si\ a \geq 0 \\ -a, si\ a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo

$|5| = 5$

$|-5| = -(-5) = 5.$

Observaciones

- Por la definición, vemos que el valor absoluto de un número es un número positivo o cero, es decir, es un número no negativo.
- En términos geométricos, el valor absoluto de un número x es su distancia desde cero, sin importar el sentido de la misma.

Probaremos algunos teoremas relativos al valor absoluto de un número real:

Teorema 1.

Para todo numero real a, $|a| \geq 0.$ *Además* $|a| = 0 \Rightarrow a = 0.$

Prueba:

si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a.$

si $a < 0 \Rightarrow -a > 0,$ de modo que en este caso, usando la definición tenemos $|a| = -a > 0.$

Esto prueba la primera parte del teorema.

Si a $\neq$ 0, entonces ó a $>$ 0 y $|a| = a >$ 0.

ó a $<$ 0 y $|a|$ = -a $>$ 0.

Así pues, a $\neq$ 0, implica $|a|$ $\neq$ 0, o equivalentemente $|a| = 0 \Rightarrow a = 0.$ (contrarecíproco)

Teorema 2

$$\forall a : |a| = |-a|.$$

Prueba:

$a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \wedge |-a| = a,$ de donde $|a| = |-a|.$

$a < 0 \Rightarrow -a > 0,$ de aquí $|a| = -a \wedge |-a| = -a,$ por lo que $|a| = |-a|.$

Teorema 3

$$\forall a : -|a| \leq a \leq |a|.$$

Prueba:

Si $a \geq 0,$ nos queda $|a| = a \Rightarrow |a| \geq a \wedge -|a| \leq -a < a.$

Si a $<$ 0 $\Rightarrow$ -a $>$ 0.

Si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0,$ de donde $a \leq |a| \wedge$

$a < 0 \Rightarrow -|a| \leq -a,$ de donde $-a \geq - |a|$

$a < 0 \Rightarrow -|a| = -(-a) = a,$ de donde $-|a| \leq a.$

Teorema 4

$$\forall a, \forall b: \ |a \bullet b| = |a| \bullet |b|.$$

Prueba:

Caso 1:

si $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow |a| = a \wedge |b| = b,$ de modo que $|a| \bullet |b| = a \bullet b = |a \bullet b|,$ ya que $a \bullet b \geq 0,$

de aquí $|a \bullet b| = |a| \bullet |b|.$

Caso 2:

si $a \geq 0 \wedge b < 0 \Rightarrow \left||a \bullet b| = |-(a \bullet b)| = |a(-b)|\right|;$ ahora el caso 1 se aplica, ya que $a > 0$ y $-b > 0,$ por lo tanto $|a \bullet b| = |a(-b)| = |a||-b| = |a||b|.$

Caso 3:

si $a<0 \wedge b \geq 0,$ intercambiamos $a \wedge b$ en el caso 2.

Caso 4:

si $a<0 \wedge b<0 \Rightarrow a \bullet b>0,$ nos queda $|a \bullet b|=|(-a)(-b)|=|-a||-b|=|a||b|.$

Teorema 5

$$\forall k>0, \forall x:(|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k).$$

A) $|x| \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k.$

Demostración: consideramos dos casos, según x sea negativo o no lo sea.

a) $x < 0$.

Por definición de módulo $x < 0 \Rightarrow |x|=-x.$

Por propiedad de $\mathbb{R}$: $x < 0 \Rightarrow x < -x$.

Luego es $x < |x|$.

Como por hipótesis es $|x| \leq k,$ resulta $x \leq k.$

Además $-x=|x| \leq k \Rightarrow -k \leq x,$ luego $x \leq k \wedge -k \leq x,$ que es la tesis.

b) $x \geq 0$.

Por definición de modulo $x \geq 0 \Rightarrow |x|=x.$

Si reemplazamos $|x|$ por x en la tesis, queda $x \leq k$.

Por propiedad de $\mathbb{R}$: $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq x$.

Por transitividad: $-x \leq x \wedge x \leq k \Rightarrow -x \leq k.$

Por propiedad de $\mathbb{R}$: $-x \leq k \Leftrightarrow -k \leq x$.

Por lo tanto, $x \leq k \wedge -k \leq x$, que es la tesis.

B) $-k \leq x \leq k \Rightarrow |x| \leq k.$ Consideramos también dos casos.

a) $x < 0$.

Por definición de modulo x < 0 $\Rightarrow |x| = -x,$ luego, si en la hipótesis reemplazamos en el primer miembro x por $-|x|$; resulta:

$$-k \leq -|x|, \text{ luego es } |x| \leq k.$$

b) x ≥ 0.

Por definición de módulo: x ≥ 0 $\Rightarrow |x| = x.$

Como por hipótesis es $x \leq k,$ resulta $|x| \leq k.$

Observaciones

* Este teorema permite completar la consideración de conjunto acotado. En efecto, si un conjunto C, es tal que:

$\forall x \in C: |x| \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k$ y por lo tanto C está acotado.

-k es una cota inferior, y k es una cota superior.

* Si C está acotado, puede probarse que existe un número positivo k tal que $\forall x: \left(x \in A \Rightarrow |x| \leq k \right).$

Ejemplo

Sea $A = \{ x / 1 \leq x \leq 5 \}.$

En este caso, también -5 es cota inferior y resulta: $-5 \leq x \leq 5.$ Luego $|x| \leq 5.$

Sea $B = \{ x / -4 \leq x \leq -1 \};$ resulta también $x \leq 4,$ por lo cual 4 es cota superior de B y, por lo tanto, $\forall x: \left(x \in B \Rightarrow |x| \leq 4 \right).$

En síntesis:

Si $a \leq x \leq b$ y k es el máximo $\{|a|, |b|\},$ entonces $|x| \leq k.$

Por lo tanto, puede probarse la siguiente propiedad:

C es un conjunto acotado $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \wedge k > 0 / \forall x: \left(x \in C \Rightarrow |x| \leq k \right).$

Teorema 6

$$\forall k > 0, \forall x: \{|x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k \vee x \leq -k\}.$$

Teorema 7

$\forall a, \forall b: |a+b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular)

Demostración.

- Por el teorema 3 es: $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$.

Si se suman miembro a miembro las dos relaciones anteriores, resulta:

$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$, pero:

$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b| \Leftrightarrow |a+b| \leq |a|+|b|$ por el teorema 5.

Observaciones: esta propiedad se generaliza para cualquier número de sumados. Para la demostración en este caso general debe utilizarse el PIC, que es el siguiente:

-Sea:

p(n) una proposición asociada a cada número natural n, que puede ser v o f. si se cumple:

1°) p (1) es verdadero.

2°) p (k) es verdadero implica que: p (k +1) también es verdadera, cualquiera sea el número natural k. Entonces p(n) es verdadero para todo número natural.

Teorema 8

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_i \in \mathbb{R}: |a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|.$$

Demostración por inducción:

- Sea: p (n) la expresión: $|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$.

1°) p (1) es verdadero pues el $|a_1| \leq |a_1|$.

2°) $\forall k: (p(k)\ verdadero \Rightarrow p(k+1)\ verdadero)$.

En efecto: $|a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + ... + a_k) + a_{k+1}|$, y

$$\left|\left(a_1 + a_2 + ... + a_k\right) + a_{k+1}\right| \leq \left|a_1 + a_2 + ... + a_k\right| + \left|a_{k+1}\right|,$$ según el teorema 7.

Además: $\left|a_1 + a_2 + ... + a_k\right| + \left|a_{k+1}\right| \leq \left|a_1\right| + \left|a_2\right| + ... + \left|a_k\right| + \left|a_{k+1}\right|$ por ser verdadero p (k). Por transitividad queda la tesis.

Teorema 9

$$\forall a, \forall b : |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Teorema 10

$$\forall a, \forall b : |a - b| \geq \left||a| - |b|\right|.$$

Aplicando la desigualdad del triangulo a los números a –b y b, tenemos:

$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$, Consecuentemente; $|a| - |b| \leq |a - b|$.

Análogamente $|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a|$, y $|b| - |a| \leq |b - a|$.

Por el teorema 2, nos queda:

$$|b| - |a| \leq |a - b| \Rightarrow |a| - |b| \geq -|a - b|,$$
$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|,$$
$$\left||a| - |b|\right| \leq |a - b|.$$

De los dos números $|a| - |b|$ y $|b| - |a|$, uno es $\left||a| - |b|\right|$, de donde se tiene:

$$\left||a| - |b|\right| \leq |a - b|.$$

I.5.-Conjuntos en la Recta

Los conjuntos que son de uso más frecuente en análisis son los intervalos. Estos son conjuntos de números reales definidos por la propiedad de que sus elementos satisfacen ciertas desigualdades.

Intervalos

Sea $a, b \in \mathbb{R} / a \leq b,$ pondremos:

Intervalo cerrado

Es el conjunto de todos los números x para los cuales $a \leq x \leq b.$

Se denota mediante $[a, b]$.

Podemos escribir la definición de la siguiente manera: $[a, b] = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$.

a y *b* reciben el nombre de extremos del intervalo.

Representación en la recta numérica:

La longitud del intervalo $[a, b]$ es el número positivo b – a.

Intervalo abierto:

Es el conjunto de todos los números reales x para los cuales
a < x < b.

Se denota mediante (a, b).

En símbolos: $(a, b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$.

Representación en la recta numérica:

Además de los intervalos definidos anteriormente, tenemos los intervalos semiabiertos, como:

$$\left(a,b\right]=\left\{x/\ x\in\mathbb{R}\ \wedge\ a<x\leq b\right\}.$$
$$\left[a,b\right)=\left\{x/\ x\notin\mathbb{R}\ \wedge\ a\leq x<b\right\}.$$

Observaciones:

Estas definiciones pueden generalizarse considerando la recta y la semirrecta como intervalos no acotados, lo que se expresa utilizando los símbolos $+\infty$ y $-\infty$. Estos símbolos deben ser considerados con especial atención y recordando que se usan solamente por conveniencia de notación y nunca como números reales.

Así tenemos los siguientes intervalos:

Semirrectas de origen a ó b. $\left[\begin{array}{l} \left[a,+\infty\right)=\left\{x/\ x\geq a\right\} \\ \left(a,+\infty\right)=\left\{x/\ x>a\right\} \\ \left(-\infty,b\right]=\left\{x/\ x\leq b\right\} \\ \left(-\infty,b\right)=\left\{x/\ x<b\right\} \\ \left(-\infty,+\infty\right)=\mathbb{R}. \end{array}\right.$

Observaciones:

- En cada uno de los intervalos, los números *a* y *b* se llaman extremos del intervalo.
- Los intervalos se usan para representar conjuntos de soluciones de desigualdades en una variable.
- El conjunto de soluciones de tal desigualdad es el conjunto de todos los números que satisfacen la misma.

Entorno - Entorno Reducido

Definición 1

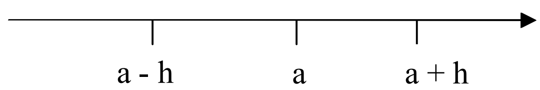
Sea *a* un punto de la recta real y *h* un numero positivo, se define como entorno de centro *a* y radio h al intervalo abierto (*a – h; a + h*).

Se lo designa en forma simbólica: E(*a, h*).

$E(a, b) = \{x / a - h < x < a + h\}$

$E(a, b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge |x - a| < h\}$

$E(a, b) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge d(x, a) < h\}$



Algunos entornos suelen designarse indicando solamente el centro, por ejemplo *E(a)*

Definición 2

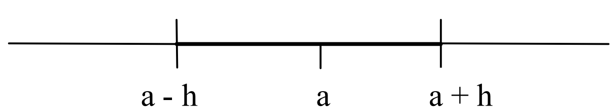
Sea *a* es cualquier punto de la recta y $h > 0$, llamamos entorno reducido de centro *a* y radio *h* al conjunto de puntos del intervalo abierto ($a - h; a + h$) del cual se excluye el punto a.

Se designa $E'(a, h)$ o bien $E'(a)$.

Simbólicamente:

$E'(a, h) = \{x / x \neq a \wedge a - h < x < a + h\}$

$E'(a, h) = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 0 < |x - a| < h\}$



Observación:

1.-Obsérvese que exigir $0 < |x - a|$ *equivale a exigir* $x \neq a$, *pues* $|x - a| = 0 \Leftrightarrow x = a$.

2.- De acuerdo con la propiedad de los conjuntos acotados, cualquier conjunto acotado puede incluirse en un intervalo cerrado. En efecto:

Si C está acotado $\Rightarrow \exists k > 0 / \forall x: \left(x \in C \Rightarrow |x| \leq k \right),$ por lo tanto C $\subset$ $\left[-k, k \right]$.

Ejemplo

$A = \left\{ x / -2 < x \leq 6 \right\} \Rightarrow A \subset \left[-6; 6 \right].$

3.- *Propiedad*

Un conjunto acotado está incluido en un entrono con centro en el origen.

Si $C = \left\{ x / |x| \leq k \right\}$ y $h > k \Rightarrow C \subseteq E(0, h)$.

Ejemplo: $A \subseteq E(0,7)$. siendo $A = \left[-6; 6 \right]$

4.- Existen infinitos entornos que incluyen al conjunto A, pero en este caso, ninguno de ellos tiene radio mínimo.

Ejemplo:

Sea $B = \left\{ x / -5 \leq x < 7 \right\};$ en este caso E(0, 7) es el entorno centrado en el origen de menor radio; que incluye a B.

I.6.-Actividades de aplicación

1).-Escriba como intervalo y, si es posible, como entornos, los siguientes conjuntos:

$1.1) A = \left\{ x / 2 \leq x \leq 4 \right\}$ $\quad$ $1.2) B = \left\{ x / -1 < x \leq 3 \right\}$

$1.3) C = \left\{ x / -7 \leq x < -2 \right\}$ $\quad$ $1.4) D = \left\{ x / -1 < x < 3 \right\}$

$1.5) E = \left\{ x / -3 < x < 1 \right\} - \left\{ -1 \right\}$ $\quad$ $1.6) F = \left\{ x / -3 < x < -1 \right\}$

$1.7) M = \left\{ x / |x - 2| < 5 \right\}$ $\quad$ $1.8) N = \left\{ x / |x + 2| \leq 3 \right\}$

$1.9) P = \left\{ x / 0 < |x - 3| < 1 \right\}$ $\quad$ $1.9) Q = \left\{ x / 0 < |x + 4 < 2| \right\}$

2).- Para cada uno de los siguientes conjuntos, dar un entorno con centro en el origen, que lo incluya:

2.1) $A=\{x/-2 \leq x \leq 4\}$ 2.2) $B=\{x/-10 < x < 7\}$
2.3) $C=\{x/-6 \leq x \leq 6\}$ 2.4) $D=\{x/-3 < x \leq 4\}$
2.5) $F=\{x/|x| < 2\}$ 2.6) $G=\{x/|x| \leq 2\}$

3) Para cada conjunto dar, si existe, el entorno con centro en el origen, de menor radio que lo incluya:

3.1) $A=\{x/-1 < x < 4\}$ 3.2) $B=\{x/-9 < x \leq 6\}$
3.3) $C=\{x/-3 \leq x \leq 7\}$ 3.4) $D=\{x/-5 < x \leq -2\}$
3.5) $E=\{x/-2 < x \leq 9\}$ 3.6) $F=\{x/4 < x < 5\}$

I.7.- *Igualdades y desigualdades*

Aplicando las definiciones y las propiedades de las relaciones de orden, y las propiedades del cuerpo de los números reales se resuelven ecuaciones e inecuaciones determinando su conjunto solución. En el caso de las inecuaciones, como unión de intervalos o intersección de ellos

Resultados básicos

Antes de discutir la solución de ecuaciones y desigualdades en que aparezcan implicados valores absolutos, daremos algunos resultados básicos utilizados en la solución de tales problemas.

* $|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \ y \\ -a = b \vee a = b \end{cases}$ (Se deduce de la formula de valor absoluto)

** $|a| < b \Leftrightarrow -a < b \wedge a < b,$ Esto se deduce de la definición

$\Leftrightarrow a > -b \wedge a < b$ de valor absoluto y del teorema 3.

$\Leftrightarrow -b < a < b,$

si $b > 0,$ entonces $|a| < b \Leftrightarrow a \in (b, -b).$

*** $|a| > b \Leftrightarrow -a > b \vee a > b$

$\Leftrightarrow a < -b \ \vee \ a > b$

$\Leftrightarrow a \in (-\infty, -b) \cup (b, +\infty).$

Ejemplo 1

Resuelva la siguiente ecuación: $|3x-1| = 2x+5.$

$$|3x-1| = 2x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ -(3x-1) = 2x+5 \ \vee \ 3x-1 = 2x+5 \end{cases}$$

$$|3x-1| = 2x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5/2 \\ x = -4/5 \vee x = 6. \end{cases}$$

Respuesta: la ecuación tiene dos soluciones: $-\frac{4}{5}$ y 6.

Comprobación para $x = -4/5$, nos queda: $\left|3\left(-4/5\right)-1\right| = \frac{17}{5} = 2\left(-\frac{4}{5}\right)+5.$

Comprobación para $x = 6$ $\left|3 \bullet (6) - 1\right| = 17 = 2 \bullet (6) + 5.$

Ejemplo 2

Resuelva la siguiente ecuación: $|x+1| = 3x-9.$

$$|x+1| = 3x-9 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-9 \geq 0 \\ -(x+1) = 3x-9 \vee x+1 = 3x-9 \end{cases}$$

$$|x+1| = 3x-9 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 2 \vee x = 5. \end{cases}$$

$$|x+1| = 3x-9 \Leftrightarrow x = 5.$$

Respuesta: 5 es la única solución de la ecuación.

Comprobación: $|5+1| = 6 = 3\bullet(5) - 9.$

Ejemplo 3

Resuelva la siguiente igualdad: $|x-a| < r,$ donde $r > 0.$

Solución: $|x-a| < r \Leftrightarrow -r < x-a < r$

$$\Leftrightarrow a-r < x < a+r$$
$$\Leftrightarrow x \in (a-r, a+r)$$
$$\Leftrightarrow x \in E(a,r).$$

Ejemplo 4

a) Resuelva la desigualdad: $|3x-1| < 2x+5.$

$$|3x-1| < 2x+5 \Leftrightarrow 3x-1 > -(2x+5) \wedge 3x-1 < 2x+5$$

$$|3x-1| < 2x+5 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{5} \wedge x < 6$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-{}^{4}\!/_{5}, 6\right).$$

b) Resuelva la desigualdad: $|3x-1| > 2x+5.$

$$|3x-1| > 2x+5 \quad \Leftrightarrow 3x-1 < -(2x+5) \vee \ 3x-1 > 2x+5$$

$$|3x-1| > 2x+5 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{5} \ \vee \ x > 6$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup (6, +\infty).$$

Ejemplo 5

Resuelva la ecuación: $|3x+2| = 5.$

Solución: $|3x+2| = 5 \Leftrightarrow 3x+2 = 5 \vee -(3x+2) = 5$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = -\frac{7}{3}.$$

Ejemplo 6

Esta ecuación $|2x-1| = |4x+3|$, se satisfará si:

$$|2x-1| = |4x+3| \Leftrightarrow 2x-1 = 4x+3 \vee 2x-1 = -(4x+3)$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1/3.$$

Ejemplo 7

La siguiente ecuación: $|5x+4| = -3,$ no tiene solución debido a que el valor absoluto de un número no puede ser negativo.

Observaciones:

- Si a $>$ 0, $\sqrt{a}$ es el símbolo que designa la raíz cuadrada positiva del numero a.

- Obsérvese además, que $\sqrt{b^2}$ no es necesariamente igual al numero b, ya que puede probarse que $\left|\sqrt{b^2}\right| = |b|,$ por lo tanto, si b $<$ 0 es $\left|\sqrt{b^2}\right| = |b| = -b;$ y en este caso el índice de la raíz y el exponente no pueden cancelarse, pues $\sqrt{b^2} = -b \neq b.$

Ejemplo 8

Hallar el conjunto solución de esta desigualdad: 2 + 3x $<$ 5x + 8.

Solución:

2 + 3x $<$ 5x + 8 $\Leftrightarrow$ 2 + 3x -2 $<$ 5x + 8 -2

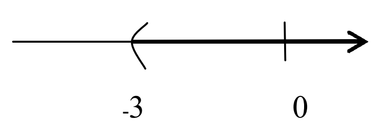
$\Leftrightarrow$ 3x $<$ 5x + 6

$\Leftrightarrow$ -2x $<$ 6

$\Leftrightarrow$ 2x $>$ - 6

$\Leftrightarrow$ x $>$ $-6/2$

$\Leftrightarrow$ x $>$ - 3.



El conjunto Solución S = $\{$x / x $>$ - 3$\}$ = (-3, + ∞).

Ejemplo 9

Obtenga el conjunto solución de la desigualdad $4 < 3x - 2 \leq 10$, e ilústrelo en la recta numérica.

Solución: $4 + 2 < 3x - 2 + 2 \leq 10 + 2$.

$$6 < 3x \leq 12$$

$$2 < x \leq 4.$$

$S = \{x \,/\, 2 < x \leq 4\} = (2, 4]$

Ejemplo 10

$3x + 5 > x - 3 \Leftrightarrow 3x + 5 - x - 5 > x - 3 - x - 5$

$$\Leftrightarrow \quad 2x > -8$$

$$\Leftrightarrow \quad x > -4.$$

$S = \{x \,/\, x > -4\} = (-4, +\infty)$

Ejemplo 11

$\frac{7}{x} > 2$.

$$\frac{7}{x} > 2 \Leftrightarrow \frac{7}{x} - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7-2x}{x} > 0 \Leftrightarrow \left[(7-2x > 0 \wedge x > 0) \underline{\vee} (7-2x < 0 \wedge x < 0)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(-2x > -7 \wedge x > 0) \underline{\vee} (-2x < -7 \wedge x < 0)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(2x < 7 \wedge x > 0) \underline{\vee} (2x > 7 \wedge x < 0)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x < 7/2 \wedge x > 0\right) \underline{\vee} \left(x > 7/2 \wedge x < 0\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{7}{2}\right) \cup \varnothing \Leftrightarrow x \in \left(0, 7/2\right).$$

Ejemplo 12

Determinar el conjunto solución de la desigualdad: $\frac{x}{x-3} < 4$.

Solución: $\frac{x}{x-3}-4<0 \Leftrightarrow \frac{x-4(x-3)}{x-3}<0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4x+12}{x-3}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+12}{x-3}<0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(-3x+12>0 \wedge x-3<0\right) \underline{\vee} \left(-3x+12<0 \wedge x-3>0\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(-3x>-12 \wedge x<3\right) \underline{\vee} \left(-3x<-12 \wedge x>3\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x<4 \wedge x<3\right) \underline{\vee} \left(x>4 \wedge x>3\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty,3\right) \cup \left(4,+\infty\right).$$

Ejemplo 13

Desigualdades cuadráticas: $x^2-5x+6<0.$

$$\left(x-2\right)\left(x-3\right)<0 \Leftrightarrow \left[\left(\left(x-2\right)<0 \wedge \left(x-3\right)>0\right) \underline{\vee} \left(\left(x-2\right)>0 \wedge \left(x-3\right)<0\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x<2 \wedge x>3\right) \underline{\vee} \left(x>2 \wedge x<3\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \varnothing \cup \left(2,3\right) \Leftrightarrow x \in \left(2,3\right).$$

I.8.- *Conjunto derivado.*
Punto de acumulación

Sea C es un conjunto de puntos de la recta real, un punto *a* es un *punto de acumulación (pac)* de C, si a todo entorno reducido de a pertenece por lo menos un punto de C.

El punto a puede o no pertenecer a C, pero la definición exige que en cualquier entorno del punto *a* exista por lo menos un punto de C distinto de *a*. Es decir:

$$\text{\textit{a es pac de C}} \Leftrightarrow \forall \overset{'}{E}(a) : \exists x / \left(x \in C \wedge x \in \overset{'}{E}(a)\right) \qquad (1)$$

ó bien *a es pac de C* $\Leftrightarrow \forall h > 0 : \exists x / \left(x \in C \wedge 0 < |x - a| < h \right),$

ó bien *a es pac de C* $\Leftrightarrow \forall E^{'}(a) : E^{'}(a) \cap C \neq \varnothing.$

Ejemplos:

1) Si C es un intervalo cerrado, todos sus puntos son *pac*.
2) Si C es un intervalo abierto, todos sus puntos son *pac* y también lo son sus extremos, aunque no pertenezcan al conjunto.
3) $\mathbb{N}$ no tiene *pac*, pues si *a* es cualquier numero natural, basta considerar un entorno de centro *a* y radio *h < 1* y a este entorno reducido no pertenece ningún numero natural. Esto prueba que ningún natural es *pac* de $\mathbb{N}$ Mediante un recurso similar puede probarse que ningún numero real es *pac* de $\mathbb{N}$
4) $\mathbb{Q}$ tiene a todos los reales como *pac*.
5) $\mathbb{R}$ tiene a todos los reales como *pac*.

Conjunto derivado: *Definición*

El conjunto formado por todos los pac de C, es el conjunto derivado de C y se designa con C$^{'}$, en símbolos: C' *= {x / x es pac de C}.*

Ejemplo

Si $C = [a, b] \Rightarrow C^{'} = [a, b]$

$C = (a, b) \Rightarrow C^{'} = [a, b].$

Recordemos

$$\sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q.$$

Para probar que un punto es *pac* de un conjunto, basta encontrar un entorno reducido del mismo al cual no pertenezca ningún punto del conjunto. Para esto uso:

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \equiv p \Rightarrow \sim q$, por ejemplo en **(1)** nos queda:

$\sim\left(x \in C \wedge x \in E^{'}(a)\right) \equiv x \notin C \vee x \notin E^{'}(a) \equiv x \in C \Rightarrow x \notin E^{'}(a)$.

Es decir que *a* no es *pac* de C, si y solo sí, existe un entorno reducido de *a*, al cual no pertenece ningún punto del conjunto (es la negación lógica de la definición de pac). En símbolos:

a no es pac de C $\Leftrightarrow \exists E^{'}(a) / \forall x : \left(x \in C \Rightarrow x \notin E^{'}(a)\right)$,

ó bien *a no es pac de C* $\Leftrightarrow \exists E^{'}(a) / E^{'}(a) \cap C = \varnothing$.

Observación:

Un conjunto finito no tiene *pac.*

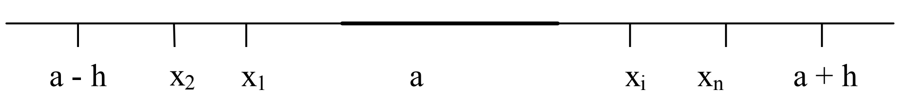
***Teorema**:*

Si *a* es *pac* de C entonces cualquier entorno del punto contiene infinitos puntos de C.

Demostración:

Utilizaremos un método indirecto, por reducción al absurdo.

- Sea *E'(a)* un entorno reducido del punto *a*, al cual pertenece solamente *n* elementos de C, o sea un numero infinito de elementos de C.



- Entre los *n* puntos del *E'(a)* hay uno de ellos cuya distancia al punto *a* sea mínima, sea x_i dicho punto, diremos: $\exists x_i / \forall n \neq i : |x_i - a| \leq |x_n - a|$. Por lo tanto, basta considerar cualquier entorno reducido del punto *a*, cuyo radio sea menor que dicha distancia para asegurarnos que a dicho entorno reducido no pertenece ningún punto de C.

- Elijamos, por ejemplo, un entorno reducido, cuyo radio sea la mitad de dicha distancia.

- Al conjunto $E'\left(a, \frac{|x-a|}{2}\right)$ no pertenece ningún punto C. Esto concluye entonces en que *a* no es *pac* de C.

- Como, por hipótesis, *a* no es *pac* de C, queda probada la tesis por contradicción.

Observaciones:

-El contrarecíproco del teorema anterior permite afirmar que si un conjunto tiene un número finito de elementos, entonces no tiene *pac*.

-El recíproco es falso, pues existen un conjuntos que tienen infinitos elementos y no tienen pac, como por ejemplo el conjunto de los $\mathbb{N}$ y el de los $\mathbb{Z}$.

-Sin embargo, si un conjunto infinito está acotado, entonces puede asegurarse la existencia de por lo menos un *pac*.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Si un conjunto infinito esta acotado, entonces dicho conjunto tiene por lo menos un *pac*.

I.9.- Conjunto Cerrado

Un conjunto al cual pertenecen todos los *pac* se denomina cerrado. Es decir: un conjunto es cerrado si y solo sí le pertenecen todos sus *pac*. En símbolos:

$$C \text{ es cerrado} \Leftrightarrow (a \text{ es pac de } C \Rightarrow a \in C).$$

Ejemplos

1) $\mathbb{R}$ es cerrado, pues le pertenecen todos sus *pac*, los cuales son números reales.
2) Un intervalo cerrado es un conjunto cerrado.

Propiedad 1

Cualquier conjunto que no tiene *pac* es cerrado.

Prueba:

- Sea C un conjunto que no tiene pac.

- De acuerdo con la definición, para que C sea un conjunto cerrado debe ser verdadera la siguiente implicación: *si a es pac de C* $\Rightarrow$ *a* $\in$ *C,* pero el antecedente de esta implicación es falso, por lo tanto la implicación es verdadera.

Ejemplos:

* $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no tienen *pac*, luego son cerrados.
* Un conjunto finito, es también un conjunto cerrado, pues si es finito, no tiene *pac*; y si no tiene *pac* es cerrado.
* Los intervalos cerrados son conjuntos cerrados.

Propiedad 2

Un conjunto es cerrado si y solo sí se incluye a su derivado.

$$C \text{ es cerrado} \Leftrightarrow (a \text{ es pac de } C \Rightarrow a \in C') \Leftrightarrow \left(a \in C' \Rightarrow a \in C\right) \Leftrightarrow \left(C' \subseteq C\right).$$

Negación

Un conjunto no es cerrado si y solo sí tiene un *pac* que no le pertenece.

$$C \text{ no es cerrado} \Leftrightarrow \exists a / \left(a \in C' \wedge a \notin C\right).$$

Ejemplos

1) El conjunto de los racionales no es un conjunto cerrado pues sus *pac* son reales y de éstos, los irracionales no pertenecen a los racionales.
2) $(a,b]$ no es cerrado, pues *a* es *pac* de $(a,b]$ y $a \notin (a,b]$.

I.10.- Conjunto Compacto

Un conjunto es compacto si y solo sí es cerrado y acotado.

Ejemplos

1) Un intervalo cerrado es un conjunto compacto.
2) $\mathbb{R}$ no es compacto, pues no está acotado.
3) $\mathbb{N}$ no es compacto por la misma razón.
4) El conjunto $\{a, b\}$ es compacto, al igual que cualquier conjunto finito.

I.11.-Conjunto abierto.

Punto Interior

Un punto a, perteneciente a un conjunto C, es un punto interior al mismo, si y sólo sí existe un entorno de a, totalmente incluido en A. en símbolos:

a es punto interior (p. i) de C $\Leftrightarrow a \in C \wedge \exists E(a) / E(a) \subseteq C.$

Ejemplos

1) Cualquier número real es interior al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
2) Un número racional no es interior a $\mathbb{Q}$, pues en todo entorno de un numero racional hay números irracionales, que no pertenecen a $\mathbb{Q}$.

Conjunto Abierto

Un conjunto es abierto si y solo sí, todos sus puntos son interiores.

Ejemplos

1) $\mathbb{R}$ es abierto y $\mathbb{Q}$ no lo es.
2) *(a, b)* es abierto.
3) *(a, b]* no es abierto, pues b no es punto interior.

Observaciones:

- $\mathbb{R}$ es abierto y cerrado.
- (a, b] no es abierto ni cerrado.

Punto aislado

Un punto *a*, que pertenece a un conjunto C, es un punto aislado, si y solo sí existe un entorno reducido de a, al cual no pertenece ningún punto del conjunto C. en símbolos:

a es punto aislado en C $\Leftrightarrow a \in C \wedge \exists E'(a) / E'(a) \cap C = \varnothing.$

Ejemplos

1) Cada número natural es un punto aislado en $\mathbb{N}$.
2) Cada número entero es un punto aislado en $\mathbb{Z}$.

Punto Exterior

Un punto *a* es exterior a un conjunto C, si y solo sí existe un entorno del mismo al cual no pertenece ningún punto del conjunto C. Es decir:

a es punto exterior de C $\Leftrightarrow \exists E(a) / E(a) \cap C = \varnothing.$

Observación:

Obsérvese que el punto exterior no pertenece al conjunto.

Ejemplo

El numero 3 es exterior a los números negativos.

Punto frontera

Un punto es frontera cuando no es interior ni exterior al conjunto considerado. Es decir que el punto *a* es frontera del conjunto A, si y solo sí, en todo entorno del punto *a* hay algún punto que pertenece al conjunto A y hay algún punto que pertenece a su complemento. En símbolos:

a es punto frontera de A$\Leftrightarrow \forall E(a:)\left[E(a) \cap A \neq \varnothing \wedge E(a) \cap A^C \neq \varnothing \right].$

Observación:

De la definición resulta que un punto frontera puede o no pertenecer al conjunto.

Ejemplos

1) Un punto aislado es punto frontera.
2) El cero es punto frontera para el conjunto de los números positivos y también para el conjunto de los números negativos.
3) En el conjunto $A = \{x / 4 < x \leq 6 \vee x = 7\}$; 4, 6 y 7 son puntos frontera, además 4 no pertenece A pero 6 y 7 si pertenecen al conjunto A.

II.-FUNCIONES REALES

II	FUNCIONES REALES.
II-1	Función
II-2	Funciones Escalares.
II-3	Representación Gráfica de Funciones.
II-4	Algebra de funciones.
II-5	Igualdad de Funciones.
II-6	Funciones Pares e Impares.
II-7	Funciones definidas explícitamente.
	II-7-1 Función Constante.
	II-7-2 Función Lineal.
	II-7-3 Función Idéntica o Identidad.
	II-7-4 Función Cuadrática.
	II-7-5 Función Polinómica.
	II-7-6 Funciones Racionales.
	II-7-7 Función Valor Absoluto.
	II-7-8 Función Signo.
	II-7-9 Función Parte Entera.
	II-7-10 Funciones Trigonométricas o circulares.
	II-7-11 Función Exponencial en base a.
	II-7-12 Funciones Hiperbólicas.
	II-7-13 Funciones Inversas.

II.-FUNCIONES REALES

Es común encontrar situaciones como las siguientes:

a) El costo del transporte de madera depende de la distancia que deba recorrer.
b) El crecimiento de una planta depende de la cantidad de fertilizante.
c) El salario de una persona depende de las horas de trabajo.
d) La distancia que recorre un automóvil a velocidad constante, depende del tiempo transcurrido desde que partió de un punto específico.
e) La fertilidad de un suelo depende del contenido de nitrógeno.
f) La altura de las plantas depende del calor de la cámara.
g) La longitud de la circunferencia depende de la longitud del radio.
h) La resistencia de un cable eléctrico de longitud fija depende de su diámetro.
i) La altura de un árbol depende del diámetro del tronco, etc.

En todas estas situaciones se observa que el valor de la variable dependiente está relacionado con el comportamiento de otra u otras variables. La relación establecida entre dichas variables puede definirse por medio de una *función*. Por ejemplo:

- Si en el ejemplo a), llamamos ***x*** a la distancia recorrida por el transporte y ***y*** al costo del mismo; la situación expresada puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera:

***y = kx*,** donde k es el costo por Km; que es un valor constante.

II.1.-Función

Definición

Si *f* $\subset$ *A x B*, diremos que: *f es una función de A en B*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \exists y \in B / (x, y) \in f, (existencia) \\ \forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B : (x, y_1) = (x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2, (unicidad) \end{cases}$$

Precisamos algunos conceptos relacionados a las funciones.

Se denomina dominio y recorrido o imagen de una función a los siguientes conjuntos respectivamente:

- $Df = \{x \in A / (x, y) \in f\}$.
- $Rf = \{y \in B / (x, y) \in f\}$.

Notación:

$f : A \to B$

$x \mapsto f(x)$; *f (x)* se llama valor de la función en x.

Si indicamos $Dom = Df \Rightarrow f = \{(x, f(x)) / x \in Df\}$.

II.2.-Funciones Escalares

Las funciones cuyo dominio y recorrido son subconjuntos de $\mathbb{R}$ se denominan funciones reales, simbólicamente:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)$ tal que $Df \subset \mathbb{R}$ y $Rf \subset \mathbb{R}$.

Los siguientes son algunos ejemplos de estas funciones

Ejemplo 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 3x - 5$,

$Df = \mathbb{R}$ y $Rf = \mathbb{R}$.

Ejemplo 2

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$, $\quad Dg = \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejemplo 3

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad x\mapsto \begin{cases} \frac{1}{5}\ si x\neq 0 \\ 5\ si x=0 \end{cases}$$

Representaremos las funciones escalares de la siguiente manera:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)$, donde *f* es una función real de variable real o función escalar, si su

$Dom\subseteq\mathbb{R}$ y $Cod\subseteq\mathbb{R}$.

II.3.-Representación gráfica de funciones

Si *f* es una función, entonces la grafica de *f* es el conjunto de los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, para los cuales *(x, y)* es un par ordenado de *f.*

En símbolos:

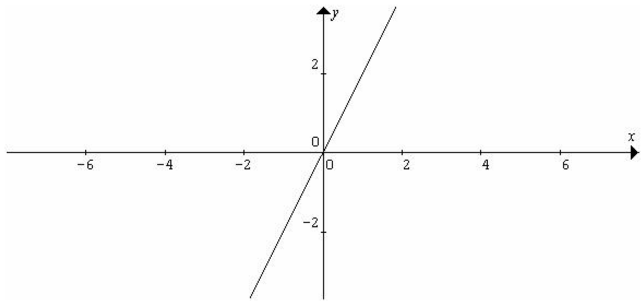
gráfica de f $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(x,y)\in f\}$.

Criterio grafico: una recta vertical intersecta la gráfica de una función sólo en un punto.

Ejemplo

Represente gráficamente la función dada por extensión *y = 2x*.

- De acuerdo a lo que conocemos el ejemplo representa una función lineal.
- El dominio de dicha función es el siguiente *Df =* $\mathbb{R}$ y el codominio es *Codf =* $\mathbb{R}$ *.* Sabemos, que un gráfico se corresponde con una recta.
- Ya aprendimos a representar este tipo de funciones a partir de la pendiente de dicha recta y con el conocimiento de que dicha recta pasa por el origen. Su pendiente es 2 de modo que la representación correspondiente es:



- Si observamos la gráfica, podemos notar que se corresponde a una recta y que su traza es continua, esto se debe al hecho de que tanto el *Df* como el *Codf* es el conjunto $\mathbb{R}$, es decir *f* es una función escalar.
- En este curso nos interesa, en particular, este tipo de funciones, es decir las funciones que tienen por dominio y codominio al conjunto de los reales.

II.4.-Álgebra de funciones

A partir de una o más funciones podemos obtener otras funciones mediante operaciones entre ellas.

Sean las funciones $f \wedge g$:

$$f: Df \to \mathbb{R} \quad \wedge \quad g: Dg \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) \qquad\qquad x \mapsto g(x)$$

Se definen:

1) La función suma y la función diferencia de la siguiente manera:

$f \pm g: D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (f \pm g)(x) \overset{def}{=} f(x) \pm g(x), \text{ donde } D(f \pm g) = Df \cap Dg.$$

2) La función producto :

$f \bullet g: D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (f \bullet g)(x) \overset{def}{=} f(x) \bullet g(x), \text{ donde } D(f \bullet g) = Df \cap Dg.$$

3) La función cociente :

$\dfrac{f}{g}: D \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) \overset{def}{=} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, donde $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = Df \cap Dg - \{x / g(x) = 0\}$.

4) La función definida por el producto de un escalar *r* por una función

$rf: D \to \mathbb{R}$

$x \mapsto (rf)(x) \overset{def}{=} rf(x)$.

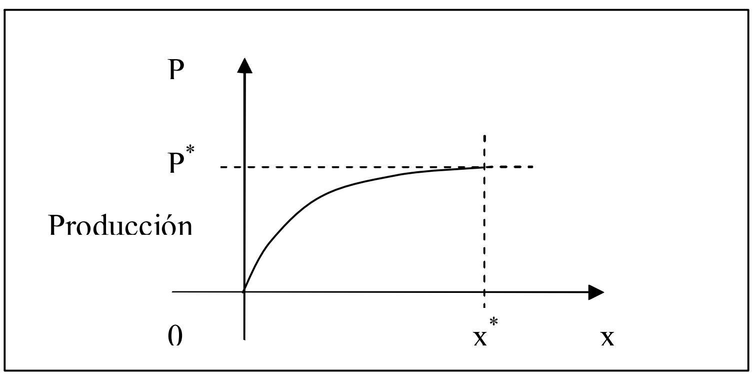
Definición 3

gráfica de f = { (x, f (x)) / x ∈ Df } y si *y = f (x)*; entonces podemos escribir:

gráfica de f= { (x, y) / x ∈ Df }.

Ejercicios

1) La productividad de una empresa, como función del número de trabajadores está dada por el siguiente gráfico:



a) Defina el dominio e imagen de la función.
b) Describa el comportamiento de la misma a partir del análisis del gráfico.

2) De acuerdo con la ley de Boyle, la presión *p* (en libras por pulgada cuadrada) y el volumen *v* (en pg cúbicos) de cierto gas satisface la

condición $p \bullet v = 800$. ¿ Cual es el rango de valores probables de la presión, dado que $100 \le v \le 200$?

3) La relación entre la temperatura Fahrenheit *F* y la temperatura Celsius *C*, está dada por $F = 32 + \frac{9}{5}C$. Si F varía de la siguiente manera $70°F \le F \le 90°F$. ¿Cual es el rango de la temperatura en grados Celsius? ¿Qué representa dicho rango?

II.5.-Igualdad de funciones.

Definición:

Sean $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D \to \mathbb{R}$; dos funciones escalares:

$$f = g \Leftrightarrow Df = Dg \wedge \forall x \in Df : f(x) = g(x).$$

Ejemplo

Sean $f : x \mapsto \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}, Df = \mathbb{R} - \{2\}$ y $g : x \mapsto x+2, Dg = \mathbb{R}.$

- Observamos que: $f \neq g$, pues el $Df \neq Dg$.
- Si hacemos una restricción de g: tal que de su dominio excluimos el 2; esto es:

  $g^* : x \mapsto x+2 \wedge x \neq 2$, resulta que:

  $f = g^*$, pues *Df = Dg**.

II.6.-Funciones pares e impares.

Función Par

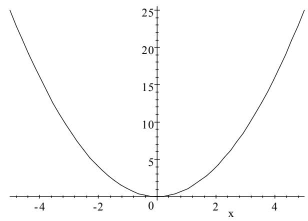
$$f \text{ es par} \Leftrightarrow \forall x : f(x) = f(-x).$$

El gráfico de *f* es simétrico respecto al eje de ordenadas.

Ejemplos

1) $f: x \mapsto \cos x.$

2) $g: x \mapsto x^2.$



Función Impar

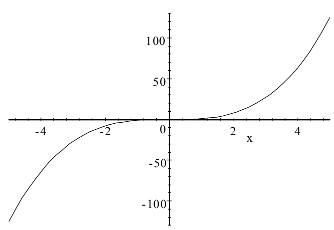
f es impar $\Leftrightarrow \forall x:\ f(x) = -f(-x).$

El gráfico de *f* es simétrico respecto al origen.

Ejemplo

1) $f: x \mapsto senx.$

2) $f: x \to x^3$



II.7.-Funciones definidas explícitamente

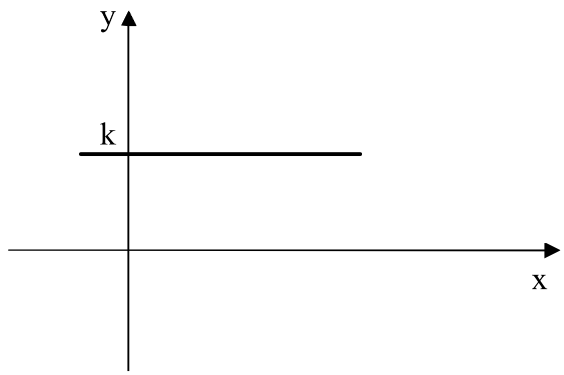
Las funciones escalares dadas por una fórmula que permite expresar la variable dependiente en función de la variable independiente, se dice que están definidas explícitamente. Veremos las funciones definidas explícitamente mas conocidas.

II.7.1.-Función constante

f es una función constante $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} / \forall x:\ f(x) = k$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\to f(x)=k \qquad Df=\mathbb{R};\ Rf=\{k\}$



II.7.2.-Función Lineal

La función cuya expresión es:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\to f(x)=ax+b, a\wedge b\in\mathbb{R}.$; recibe el nombre de *función lineal*

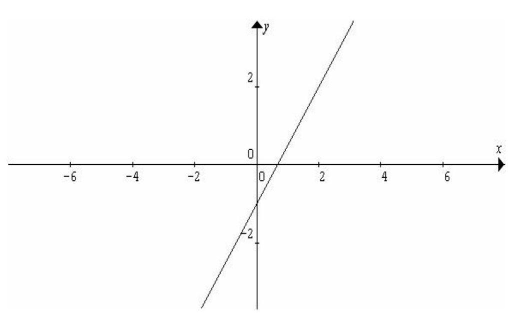
$Df=Rf=\mathbb{R}.$

El gráfico de una función lineal es una recta de pendiente α que corta al eje de las ordenadas en el punto *(0, b)*.

La función constante es un caso especial de la función lineal cuando *a = 0*.

Ejemplo

$f: x\to\frac{3}{2}x-1 \qquad tg\alpha=\frac{3}{2}.$

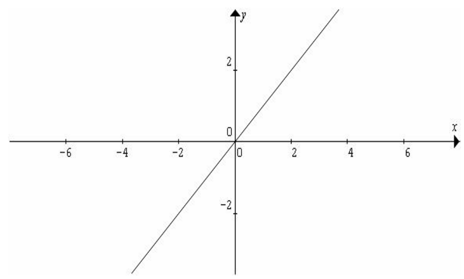


II.7.3.-Función idéntica o identidad.

f es una función idéntica $\Leftrightarrow \forall x \rightarrow f(x) = x$

$I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow f(x) = x$ $\qquad\qquad Df = Rf = \mathbb{R}$



La función idéntica es una caso especial de la función lineal cuando *b = 0 y a = 1*.

II.7.4.-Función Cuadrática

La función cuadrática se representa de la siguiente manera:

$f: x \rightarrow ax^2 + bx + c; a \neq 0$

$f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = ax^2 + bx + c \right\}.$

Su gráfico es una parábola cuyo vértice y eje se determinan fácilmente por el procedimiento de completar cuadrado.

Caso especial

$f = \left\{ \left(x, y \right) \in \mathbb{R} \,/\, y = x^2 \right\}$

$Df = \mathbb{R}$

$Rf = \left[0, +\infty \right).$

* $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c; a \neq 0.$

* $f: x \rightarrow ax^2 + bx; a \neq 0; c = 0.$

* $f: x \rightarrow ax^2 + c; a \neq 0; b = 0.$

$y = (x - h)^2 + k$, vértice = (h, k) y eje x = h.

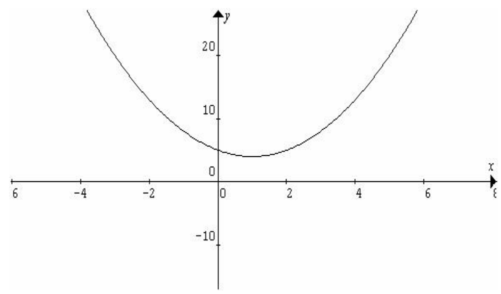
Cada parábola cuyo eje de simetría es paralela al eje y admite una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$ siendo $a \neq 0$. Además, si $a > 0$; la parábola dirige su concavidad hacia arriba y si $a < 0$; admite su concavidad hacia abajo.

Ejemplo 1

$f: x \to x^2 - 2x + 5$

$f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x-1)^2 + 1.$

V = (1, 4), y eje x = 1



.

Es fácil de comprobar que la función no es par.

Intersecciones con los ejes

$$x = 0 \Rightarrow y = 5; (0,5) \in f.$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 4\ i}{2},$$

La curva no se intersecta con el eje x.

Ejemplo 2

$g: x \to x^2 + 2x - 1$

$g(x) = (x^2 + 2x + 1) - 2 = \left(x+1\right)^2 - 2.$

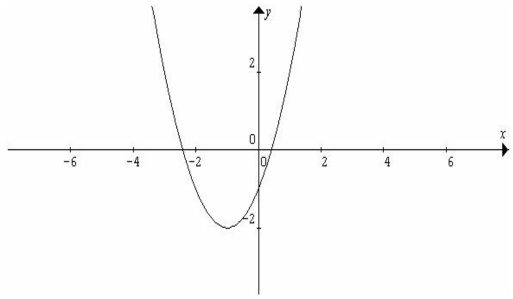
Intersecciones:

$x = 0 \Rightarrow y = -1; (0,-1) \in g.$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}, \ \ (-1+\sqrt{2},0) \in g \ \wedge \ (-1-\sqrt{2},0) \in g.$$

Como a > 0 entonces es cóncava hacia arriba.

La parábola tiene su vértice en el punto (-1,-2) y la recta x=-1 como eje.



Ejemplo 3

$h: x \to -3x^2 + 2x - 1$

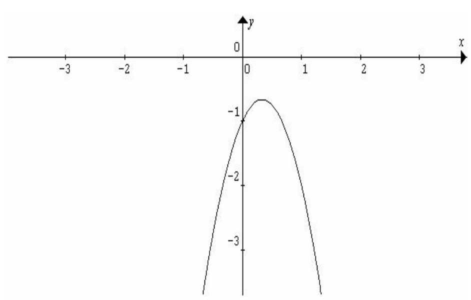
$$h(x) = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) - 1 = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 1 + \frac{1}{3} = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}.$$

$V = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, eje $x = -\frac{1}{3}$.

Intersecciones

$x = 0 \Rightarrow y = -1; (0,-1) \in h. \qquad y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-8}}{6},$

Luego, la curva no intersecta con el eje x. Como a < 0 entonces es cóncava hacia abajo.



II.7.5.-Función Polinómica

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) / \ f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

donde a_0, a_1, a_2, …, a_n son números reales y $a_0 \neq 0, n \in Z^+$.

f recibe el nombre de la función polinómica de grado n.

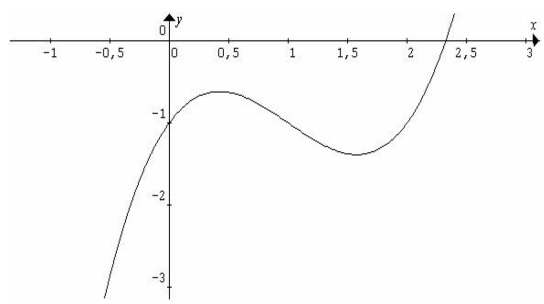
$D_f = \mathbb{R}$.

Ejemplos: la función definida por g(x) = - x^2 + 4 es una función polinómica de segundo grado

La función *f* es una función polinómica de grado tres

$f : x \to x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

Cuyo $Df = Rf = \mathbb{R}$ y su gráfica es



1) Si *n =1*; entonces la función $f(x) = a_0 x + a_1$, se expresa:

Función Polinómica de grado 1 o función Lineal.

2) Si *n =2*; entonces la función $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, se expresa:

Función Polinómica de grado 2 o función Cuadrática.

3) Si *n =3*; entonces la función $f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$, se expresa:

Función Polinómica de grado 3 o función Cúbica.

Gráfica de Funciones Polinómicas

Consideremos, en general, la gráfica de las funciones polinómicas para $n \geq 3$; se observa entonces que a medida que aumenta $|x|$ ilimitadamente, el $|a_n x^n|$ también lo hace y resultará mayor que la suma de todos los demás términos del polinomio. Por lo tanto, la forma de la gráfica para valores grandes de $|x|$ será afectada por los valores del término $a_n x^n$, así la grafica de la función polinómica para valores grandes de $|x|$ será similar a la de la grafica de una función potencial de grado n.

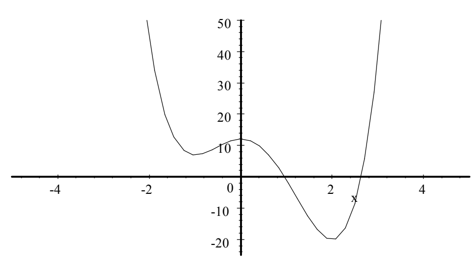
Consideremos dos casos independientes, cuando a_0 es positiva y cuando a_0 es negativa.

Caso 1: $a_0 > 0$.

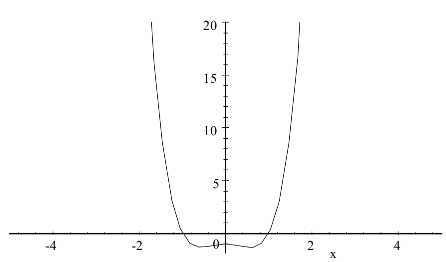
Los valores de la función aumentaran para valores grandes de x, por lo tanto, la grafica irá hacia arriba y a la derecha.

Si *n* es par ambas ramas de la grafica irán hacia arriba. Por ejemplo

$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$

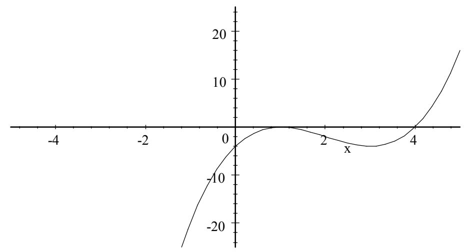


$y=3x^4-2x^2-1$



Si *n* es impar, la gráfica va hacia arriba desde la izquierda. Por ejemplo

$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

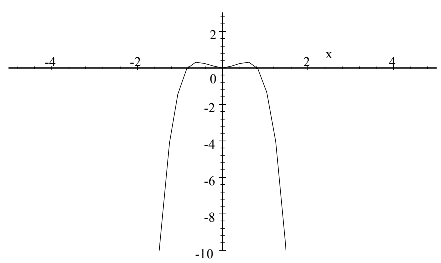


Caso 2: $a_0 < 0$.

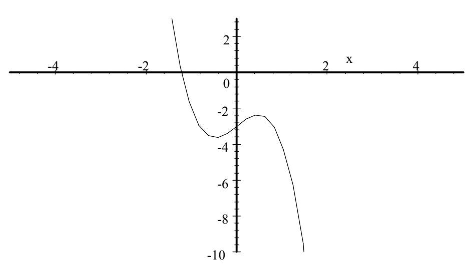
Los valores de la función disminuirán para valores grandes de x, de esta forma la gráfica irá hacia abajo, a la derecha como en los siguientes casos.

Por ejemplo:

$y = -3x^4 + 2x^2$.



$y = -3x^3 + 2x - 3.$



Si *n* es par, la gráfica va hacia arriba desde la izquierda y si *n* es impar, la gráfica irá hacia abajo desde la izquierda.

Como efectuar la gráfica aproximada de una función polinómica.

Sea $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x.$

Si $y = f(x) \Rightarrow y = x^3 + 3x^2 + 3x.$

Para efectuar el gráfico aproximado de una función polinómica, es conveniente efectuar el siguiente análisis:

i) Intersección con los ejes coordenados.

i.1) Para determinar la intersección con el eje $\overrightarrow{ox}$ hacemos *y = 0*, de donde $x^3 + 3x^2 + 3x$=0 Esta expresión define una ecuación polinómica que hay que resolver.

La curva se intersectará con el eje x en aquellos puntos que corresponden a raíces reales de dicha ecuación.

En este caso, la única raíz real es *x = 0*, de modo que el punto $(0,0) \in f.$

i.2) Para obtener la intersección con el eje $\overrightarrow{oy}$ hacemos x = 0, entonces y = 0 y nuevamente observamos que el punto $(0,0) \in f.$

ii) Simetrías

Para determinar si la gráfica guarda simetría con respecto al eje o al origen, indagamos si la función es par o impar, respectivamente.

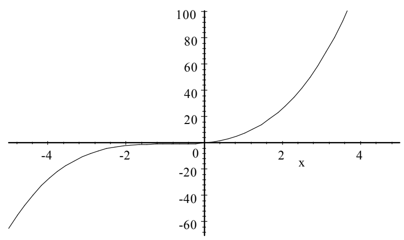
En este caso la curva no es simétrica ni con el eje y ni con respecto al origen.

iii) Comportamiento de la función en puntos muy alejados del origen.

Si *x* toma valores muy grandes en valor absoluto, la función se comporta como una función par o impar según las características de $y = a_0 x^n$.

En este caso, la función se comporta para valores grandes de *x*, casi como una función impar, es decir que toma valores muy grandes y positivos para valores grandes de *x* y positivos; y toma valores muy grandes y negativos para valores de *x* grandes y negativos. El gráfico aproximado de la función es el siguiente:

$y = x^3 + 3x^2 + 3x.$



II.7.6.-Funciones Racionales

Sea $f : Df \to \Re$

$x \mapsto f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde *p* y *q* son dos funciones polinómicas de grados n y m, respectivamente:

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

$$q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_n$$

$Df = \Re - \{x / q(x) \neq 0\}.$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ las raíces de $p(x)$ y $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$ las raíces de $q(x)$

Para obtener el gráfico aproximado de *f* conviene analizar lo siguiente:

i) Intersecciones con los ejes coordenados.

i.1).-Intersección con el eje $\overrightarrow{\overline{o}x}$

Para determinar esto hacemos *y = 0*, de donde $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0.$

Resolviendo esta ecuación obtenemos como solución las raíces de $p(x)$ que no sean a su vez raíces de $q(x)$.

Es decir, los puntos de la forma *(t, 0)* siendo *t* una raíz de $p(x)$ y no de $q(x)$ pertenece a la gráfica.

i.2.-) Intersección con el eje $\vec{oy}$.

Para obtener la intersección con el eje *y*, hacemos *x = 0*, de donde $f(x)=\dfrac{a_n}{b_m}$, siempre que $b_m \neq 0$ y el punto donde la curva se interfecta con el eje $\vec{oy}$ es $\left(0,\dfrac{a_n}{b_m}\right)$.

ii) Simetrías

Nuevamente aquí conviene analizar la paridad de *f*.

iii) Asíntotas

iii.1) *Asíntotas Verticales*

Para determinar si la función tiene una asíntota vertical estudiamos su comportamiento en proximidades de los puntos que no pertenecen a su dominio. Es decir, en proximidades a las raíces de *q(x)* que no sean raíces de *p(x)*.

Sea *p* un punto que guarda estas características y analizando el comportamiento de *f* en los valores de *x* próximos a *p* por derecha y por izquierda, puede suceder lo siguiente:

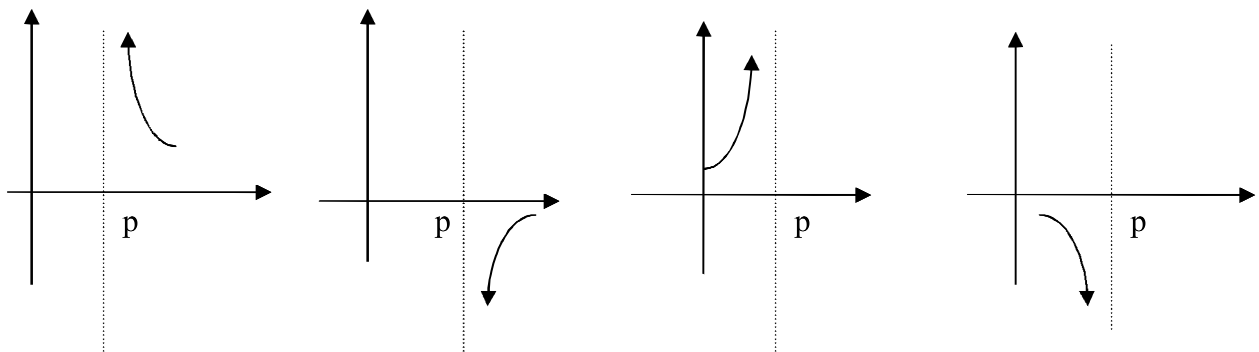
$f(x)\to+\infty$ a medida que $x\to p^+$.

$f(x)\to-\infty$ a medida que $x\to p^+$.

$f(x)\to+\infty$ a medida que $x\to p^-$.

$f(x) \to -\infty$ a medida que $x \to p^-$.

Gráficamente estas cuatro situaciones se presentan de la siguiente forma:



Entonces se dice que la recta x=p es una asíntotas vertical al gráfico de f.

iii.2) Asíntota horizontal.

Para determinar la asíntota horizontal a la gráfica de la función, si las hubiera, analizamos lo que sucede cuando x toma valores muy grandes en valor absoluto, positivo o negativo.

Esto es: analizamos el comportamiento de f(x) si $x \to -\infty$ o si $x \to \infty$

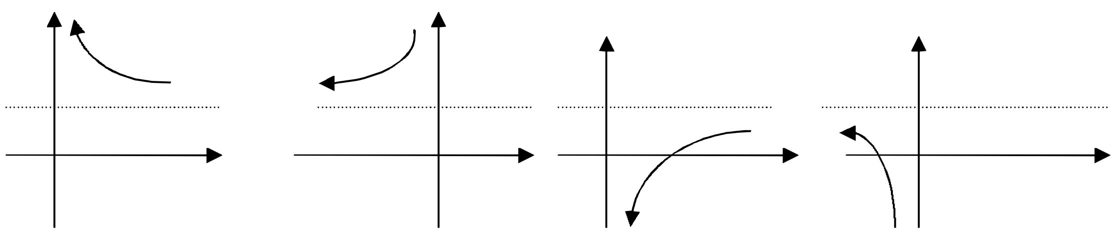
Puede entonces cumplirse cualquiera de los siguientes enunciados:

$f(x) \to b^+$ a medida que $x \to +\infty$

$f(x) \to b^+$ a medida que $x \to + -$

$f(x) \to b^-$ a medida que $x \to +\infty$

$f(x) \to b^-$ a medida que $x \to -\infty$



Entonces diremos que la recta de ecuación y=b es una asíntota horizontal al gráfico de f.

Podríamos sintetizar la situación de la siguiente manera:

La gráfica de la ecuación racional de la forma

$f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, tiene:

1. Al eje $\vec{ox}$ como asíntota horizontal cuando n < m
2. A la recta y=$\dfrac{a_0}{b_0}$ como asíntota horizontal cuando n=m
3. Ninguna asíntota horizontal cuando n>m.

Ejemplo:

Sea $f: Df \to \Re$

$$x \mapsto f(x)=\frac{2x}{x-1}$$

$Df=\{x\in\Re \,/\, x-1\neq 0\} \qquad Df=\Re-\{1\}$

i).-Intersección con los ejes

y = 0, o sea $\dfrac{2x}{x-1}=0$, la solución de esta ecuación es x=0, luego el punto (0,0) es intersección con el eje $\vec{ox}$ y con el eje $\vec{oy}$

ii) Simetrías

No posee

iii) Asíntotas

iii.1) *Asíntotas Verticales*

Analizamos la función en proximidades de x = 1 que corresponde al punto que no pertenece a su dominio

$f(x)\to +\infty$ a medida que $x\to 1^+$.

$f(x)\to -\infty$ a medida que $x\to 1^-$.

La recta x = 1 es asíntota vertical de la función.

iii.2) Asíntota horizontal

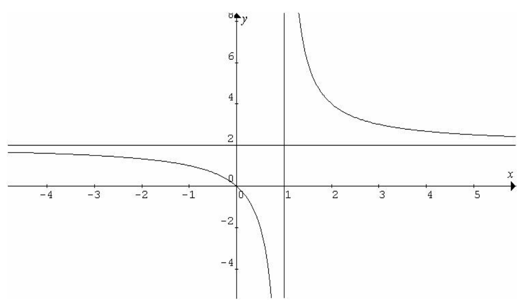
La recta y=$\frac{a_0}{b_0}$ es asíntota horizontal cuando n=m, para esta función y = 2 .

Analicemos el comportamiento de la función:

f(x)$\rightarrow 2^+$ a medida que x$\rightarrow +\infty$

f(x)$\rightarrow 2^-$ a medida que x$\rightarrow -\infty$

El grafico aproximado de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ es:



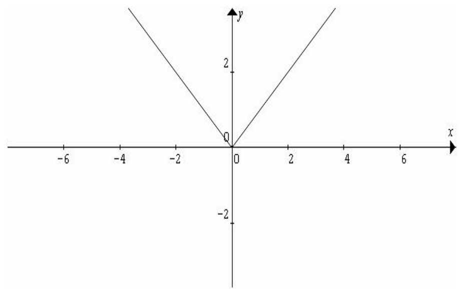
II.7.7.-Función valor absoluto

$$| \; | : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow |x| \qquad / \; x \begin{cases} x, \; si \, x \geq 0 \\ -x, \; si \, x < 0 \end{cases}$$

$$Df = \mathbb{R} \wedge Rf = [0, +\infty)$$

Su gráfica esta formado por las bisectrices del 1° y 2° cuadrante pues los valores de *f* son no negativos.



II.7.8.-Función signo

$$\forall x: \operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$$

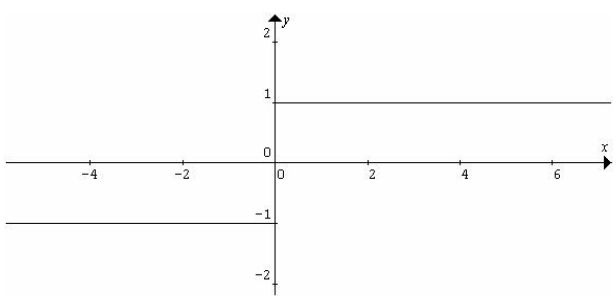
$$D\operatorname{sgn} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 si, x > O \\ -1 si, x < 0 \end{cases}$$

$$Rf = \{-1,1\}$$

$$\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{|x|}{x}$$



II.7.9.-Función Parte entera (o máximo entero o piso)

Parte entera de un número real x es el número entero x; si y solo sí *e < x < e + 1*.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to ent(x)$$

$$Df = \mathbb{R}$$

$$Rf = \mathbb{Z}.$$

Definición: se llama parte entera de un número real *x* al menor de los números enteros entre los cuales esta comprendido *x*, si *x* no es un entero, y el mismo número *x* si este es entero.

II.7.10.-Funciones Trigonométricas o Circulares

Función Periódica

Se dice que *f* es una función periódica con período $p \neq 0,$ si se cumple que *x* esta en *Df*, entonces *x + p* también esta en *Df*.

p: período de *f*, período fundamental.

f es periódica $\Leftrightarrow \exists p > 0 /\ f(x+p) = f(x), \forall x \in Df.$

Si $\exists p' < p /\ f(x+p') = f(x), \forall x \in Df \Rightarrow p = p'.$

P > 0 que verifica la periodicidad de *f* se llama período de *f*.

Ejemplo

Seno y coseno son funciones periódicas con período $2\pi;$ es decir, siempre que el valor de la variable independiente se incrementa en $2\pi;$ el valor de cada una de las funciones se repite.

Función seno

$$sen : \mathbb{R} \to [-1,1]$$

$$x \to sen(x) = \begin{cases} 1, si, x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 0, si, x = k\pi \\ -1, si, x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

* *sen (-x) = - sen (x)*, seno es una función impar.

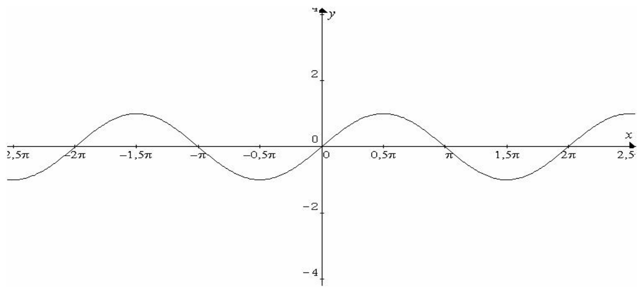
* Seno es una función periódica con *p* = $2\pi.$

$Dsen = \mathbb{R}.$

$Rsen = [-1,1].$

f no es uno a uno pues todo número en su contradominio es imagen de mas de un número de su dominio. Por eso la función seno no tiene inversa. Seno es creciente en $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

De aquí que la función seno tiene inversa en $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.



Función Coseno

$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$

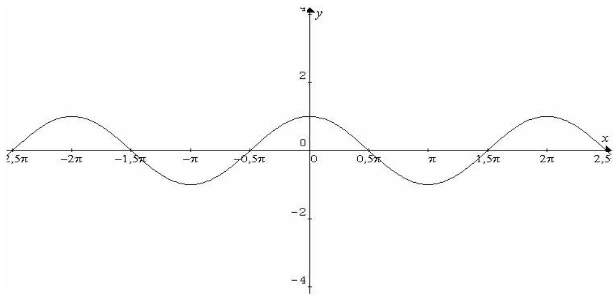
$$x \rightarrow cos(x) = \begin{cases} 1, si, x = 2k\pi \\ 0, si, x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ -1, si, x = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

* $\forall x : \cos(-x) = \cos x$; coseno es par.

* Coseno es periódica con periodo $p = 2\pi$. $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

$D\cos = \mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $R\cos = [-1,1]$.

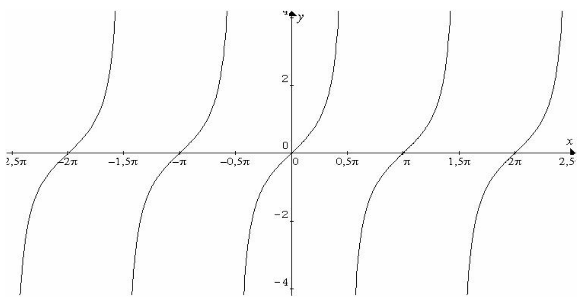
La grafica de la función coseno es aproximadamente:



Función Tangente

$tg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $Dtg = \left\{ x/\ x \in \mathbb{R} \wedge x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \right\}$ $\qquad$ $Rtg = \mathbb{R}.$

$x \to tg(x)$ $\qquad$ La tangente es periódica de periodo $p = \pi.$



Función Cotangente

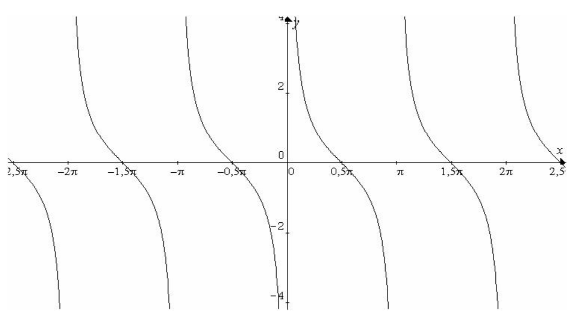
$\cot g = \{(x, y)/\ y = \cot g(x)\}$

$D\cot g = \{ x/\ x \in \mathbb{R} \wedge x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

$R\cot g = \mathbb{R}.$

Cotangente es una función periódica de periodo π.

Se analiza en (0, π).

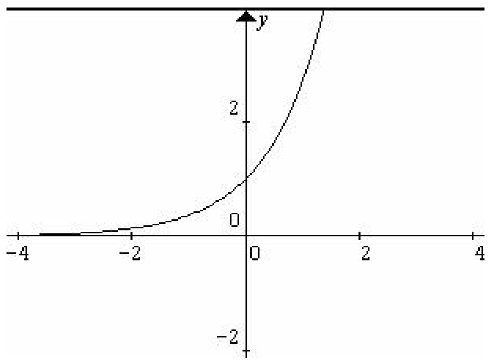


II.7.11.-Función Exponencial en base a.

Sea $a > 0 \wedge a \neq 1$

La función $E_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, recibe el nombre de función exponencial de base a.

$$x \rightarrow E_a(x) = a^x.$$



E_a es biyectiva.

Observemos que:

$E(-1) = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

$E(0) = a^0 = 1$

$E(1) = a^1 = a.$

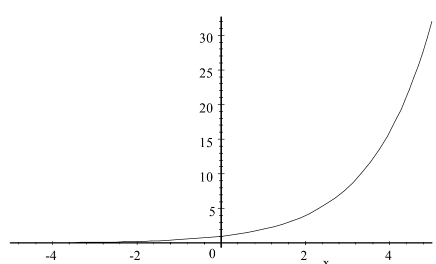
Diferenciaremos dos casos:

i) a>1

ii) 0<a<1

Caso i) a>1

Ejemplo: $y=2^x$

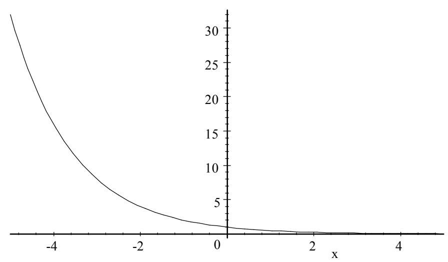


- f es biyectiva
- pasa por el punto (0,1)
- es creciente,

- es de trazo continuo,
- para valores de x que tienden a ∞, f tiende a ∞, es decir, la gráfica sube con rapidez.
- Para valores de x que tienden a -∞,la función tiende a 0, La gráfica se aproxima al eje $\vec{0x}$, por lo tanto este eje es una asíntota horizontal del gráfico de la función

Caso ii) 0<a<1

Ejemplo: y = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$



- f es biyectiva,
- Pasa por (0,1)
- Es decreciente,
- Es de trazo continuo,
- Cuando x tiende a ∞, la función tiende a 0. La gráfica se aproxima al eje $\vec{0x}$, por lo tanto este eje es una asíntota horizontal del gráfico de la función.
- Cuando x tiende a -∞, la función tiende a ∞, es decir, la gráfica sube con rapidez.

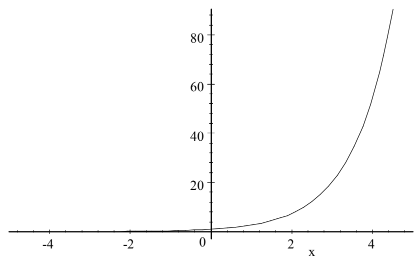
Es particularmente importante la función exponencial de base e.

e = 2,718…..constante de Euler.

La denotaremos por $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$$x \to \exp(x) = e^x.$$

Esta función se conoce como función exponencial natural y su gráfica es la siguiente:



La función exponencial es útil cuando se quiere modelizar diversos fenómenos de la vida real.

II.7.12.-Funciones Hiperbólicas

Seno Hiperbólico (sh)

$$sh(x) \overset{def}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$sh(x) \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(\exp - \frac{1}{\exp}\right).$$

O sea $sh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -sh(x).$$

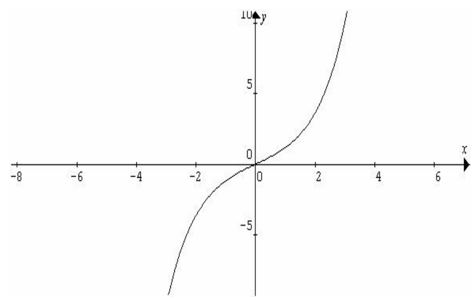
Sh es impar.

$Dsh = \mathbb{R}$

$Rsh = \mathbb{R}.$

Se obtiene por semisuma de ordenada de *exp y* $-\frac{1}{\exp}$

Por ejemplo para *x = 0* resulta *exp (0) = 1*; $\frac{1}{\exp(0)} = 1 \Rightarrow sh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0.$



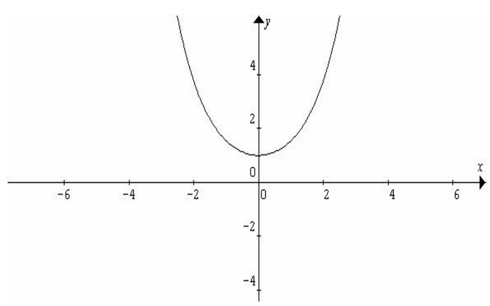
Coseno Hiperbólico (ch)

$$ch(x)\overset{def}{=}\frac{1}{2}\left(\exp+\frac{1}{\exp}\right)\Rightarrow ch(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.$$

$Dch=\mathbb{R}$

$Rch=[1,+\infty).$

Como *(ch)' es igual a sh < 0* $\forall x<0.$ como ch decrece en $(-\infty,0]$, ch crece en $[0,+\infty)$.



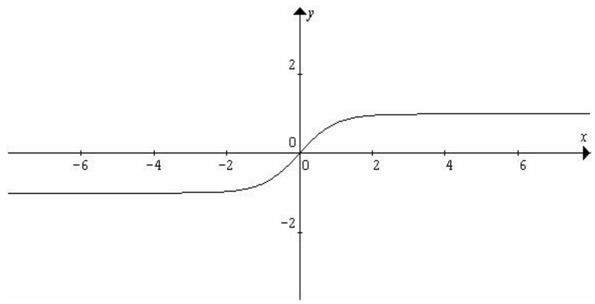
Tangente Hiperbólica (th)

$th(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$, como $e^{x}+e^{-x}>0.$

$\forall x\in\mathbb{R}$ es claro que $Dth=\mathbb{R}.$

th es impar pues $th(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=-th(x).$

Para $x \gg 0, th(x) \cong \frac{e^x}{e^x} = 1$. Aunque como $e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} : th(x) < 1$.



Observaciones

- ninguna de estas funciones son periódicas.
- Las únicas funciones que son biyectivas son sh y ch.

II.7.13.-Funciones inversas.

Sea f una función biyectiva constituida por el conjunto de pares ordenados (x,y), entonces existe una función f^{-1}, llamada función inversa de f, donde f^{-1} es el conjunto de pares ordenados (x,y) definidos por x= f^{-1}(y) si y sólo si y=f(x)

$D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f_{-1}} = D_f$

f debe ser una función biyectiva para que, según cada valor de y, el valor f^{-1}(y) sea único.

Podemos eliminar y de las ecuaciones de la definición escribiendo la expresión $f^{-1}(y) = x$, y sustituyendo y por f(x). Se obtiene entonces,

$f^{-1}(f(x)) = x$ (1), donde x$\in D_f$.

Podemos eliminar x del mismo par de ecuaciones escribiendo f(x) = y y sustituyendo x por $f^{-1}(y)$.

Resulta así $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$, donde y$\in D_{f^{-1}}$.

Puesto que el símbolo usado para la variable independiente es arbitrario, podemos reemplazar y por x para obtener

$f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ (2), donde x $\in$ D $_{f^{-1}}$

De (1) y (2) vemos que si la función inversa de f $_{-1}$ es f.

Ejemplo:

Sea f: $\mapsto 3x-1$

f es una función biyectiva del conjunto $\Re$ en sí mismo. Por lo tanto existe f^{-1}.

Para encontrar f^{-1} procedemos de la siguiente manera:

De y=3x-1 despejamos x=$\dfrac{y+1}{3}$

Resulta f^{-1}: $y \mapsto \dfrac{y+1}{3}$

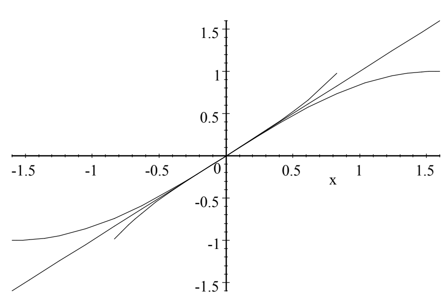
Es costumbre, al anotar la regla que corresponde a f^{-1}, llamar también x a la variable independiente.

f: x$\mapsto 3x-1$

f^{-1} :x$\mapsto \dfrac{x+1}{3}$

D $_f$ =$\Re$, R $_f$ =$\Re$, D $_{f^{-1}}$ =$\Re$; R $_{f_{-1}} = \Re$

El gráfico de f^{-1} puede construirse mediante simetría del gráfico de f respecto a la recta de ecuación y=x.



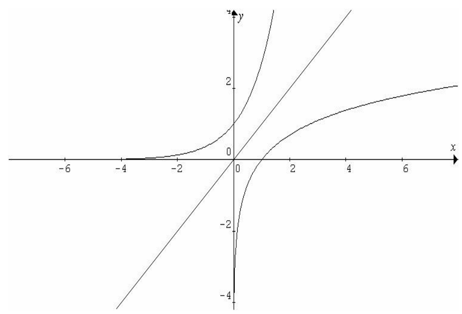
Función Logaritmo natural.

f: x $\mapsto$ ln x

Las funciones logarítmicas son inversas a las exponenciales. En particular consideramos la función logaritmo natural f: x $\mapsto$ ln x (logaritmo en base e). Esta función es la inversa de f(x) = e^x.

Esto es: y=ln x si y sólo si x= e^y.

En el siguiente gráfico observamos ambas funciones



El dominio de la función logaritmo es el conjunto de los números reales positivos. Recordemos que las gráficas de una función y la de su inversa son simétricas con respecto a la recta y = x. La gráfica de f tiene las siguientes características:

- Intersección con el eje x: (1,0)
- No tiene intersección con el eje y
- Asintótica al semieje negativo de ordenadas
- f(1) = 0

Ejemplo:

La siguiente función representa el número de bacterias presentes en cierto cultivo después de t minutos cuando había 1.500 bacterias originalmente presentes. Queremos ahora determinar cuántos minutos transcurrirán para que el cultivo contenga 30.00 bacterias.

$f(t) = 1500e^{0.04t}$ (1)

Sea t el número de minutos transcurridos para que haya 30.000 bacterias presentes, de donde f(t)= 30.000

Reemplazando en la ecuación (1), obtenemos:

$30.000 = 1500e^{0.04t}$

O lo que es lo mismo:

$20 = e^{0.04t}$ (2)

Para resolver esta ecuación aplicamos logaritmo

Ln 20= 0.04t, siendo t= 74.9

Funciones trigonométricas inversas.

Función Arco seno.

El arco seno es la función inversa del seno.

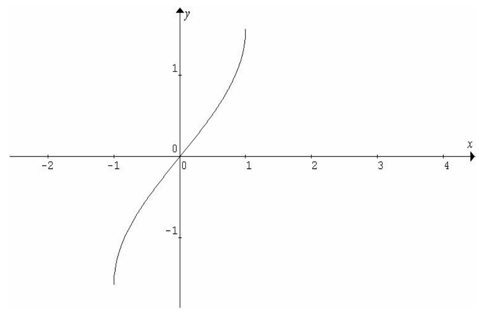
Cabe aquí realizar algunas consideraciones con relación a la función seno. Sabemos que ésta no es una función biunívoca, por consiguiente, la función seno no tiene inversa.

Sin embargo en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cualquier recta horizontal corta a la porción de la gráfica en un punto, lo cual dice, que en dicho intervalo, la función es biunívoca, y por lo tanto, en dicho intervalo, la función seno tiene inversa.

La inversa de la función seno se llama arco seno y se define de la siguiente manera:

y= arc sen x si y sólo si x=sen y y $\frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$D_{arcsen} = [-1,1]$ $R_{arcsen} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



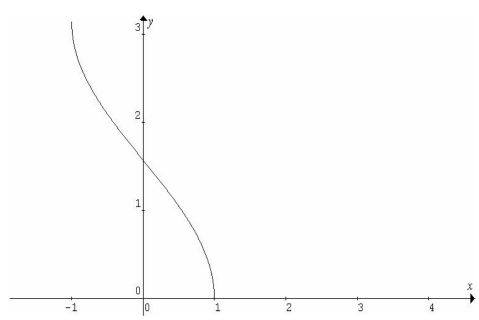
Función arco coseno

Con consideraciones similares a las hechas para la función arco seno podríamos definir el arco coseno de la siguiente manera:

Y=arc cos x si y sólo si x=cos y y $0 \leq y \leq \pi$

$D_{\text{arccos}} = [-1,1]$ y $R_{\text{arccos}} = [0,\pi]$

Su gráfico aproximado es el siguiente:



III.-FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS.

III.-FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS.

III.1.-Modelación matemática.

En ciertas aplicaciones, muchas veces se presenta como necesario expresar un caso práctico en términos de una relación funcional. La función obtenida proporciona un modelo matemático de la situación.

Un modelo matemático es un esquema, una ecuación, un diagrama o una teoría que tiene por objeto simplificar, hacer más comprensible un sistema complejo que puede provenir de una situación real.

La modelación matemática es una de las herramientas que se utilizan hoy en día para facilitar el estudio de problemas de una gran diversidad de áreas: medicina, biología, ecología, sociología, meteorología, etc.

El objetivo primordial de la modelización matemática es describir, explicar y predecir fenómenos y procesos de distintas áreas.

El modelo matemático nos permite presentar un problema que proviene de cualquier área de una manera objetiva, definiendo una serie de relaciones matemáticas entre las variables cuantitativas de dicho problema y sus propiedades.

Un modelo, por otra parte, debe ser una representación válida del problema.

Los pasos básicos en la formulación de un modelo incluyen; la conceptualización, realización y solución del mismo. Cada paso debe ser corroborado, con lo cual se valida el modelo.

El proceso para elaborar un modelo matemático es el siguiente:

i) Se identifican en principio las variables causantes del cambio del sistema.

ii) Se puede elegir no incorporar todas las variables en el modelo desde el comienzo.

iii) En este paso se especifica el nivel de resolución del modelo.

iv) Se establecen un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema que se describe. Donde se incluyen todas las leyes empíricas aplicables al sistema.

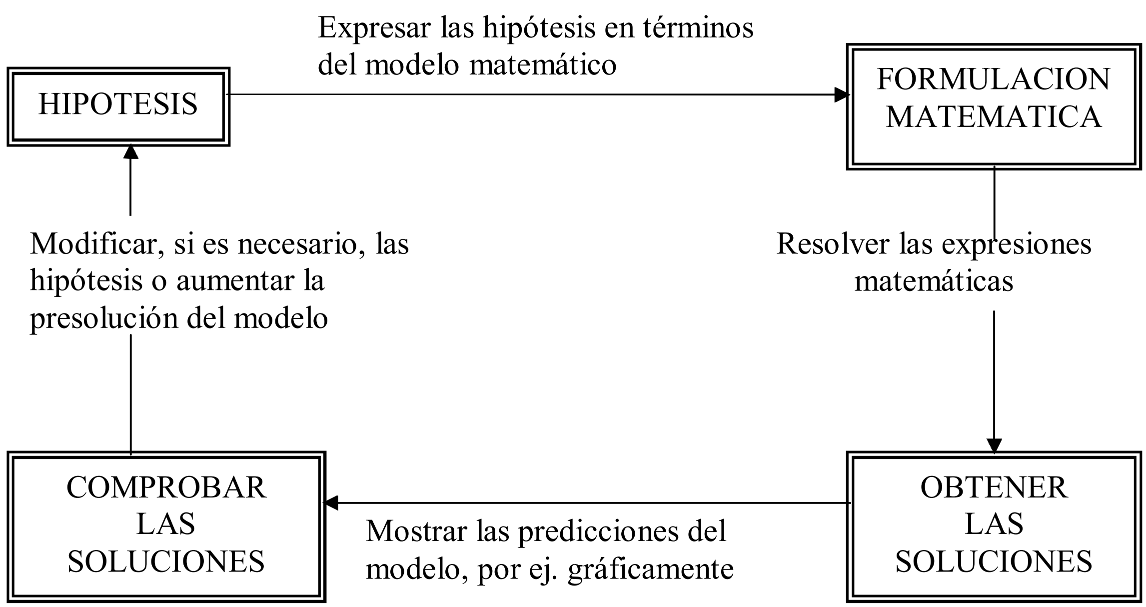
v) Se formula el modelo matemático acerca del problema, identificando variables (dependientes e independientes),

vi) Se resuelve dicho modelo matemático.

vii) Se determina si el modelo es “razonable”, si su solución es consistente con los datos experimentales o los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema.

viii) Si las predicciones que se basan en la solución son deficientes, se puede aumentar el nivel de resolución del modelo o elaborar hipótesis alternativas sobre los mecanismos del cambio del sistema.

Podemos resumir y esquematizar estos pasos de la siguiente manera.



En este apartado utilizaremos las funciones, anteriormente desarrolladas, como modelos matemáticos para representar situaciones concretas de la ciencia en general; pero principalmente de aquellas ciencias vinculadas a fenómenos de la naturaleza.

Veamos con un ejemplo el procedimiento usado para obtener algunos modelos matemáticos.

La intensidad de la luz proveniente de una fuente lumínica es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia hasta dicha fuente

a) Expresar el número de candelas (cd) (unidad de fotometría) de la intensidad de la luz, en función del número de metros de distancia desde la fuente, cuando la intensidad es de 225 cd a una distancia de 5m.

b) Obtener la intensidad en un punto a 15 m de la fuente.

Solución:

a) Sea f(x) candelas la intensidad de la luz de una fuente que está a x metros. Entonces.

Por los datos del problema sabemos que $f(x) \propto \frac{1}{x^2}$

De donde $f(x) = \frac{k}{x^2}$ (1), siendo k la constante de proporcionalidad.

Para calcular el valor de k procederemos de la siguiente manera:

Puesto que la intensidad a 5 m de la fuente es de 225 cd, sustituimos x por 5 y f(x) por 225 en (1), y así: $225=\frac{k}{5^2}$

$k=5625.$

Sustituyendo el valor de k en (1) se obtiene $f(x)= \frac{5625}{x^2}$ que es la función que representa el número de candelas en función de la distancia.

b) Con esta expresión de f(x) obtenemos

$$f(x)= \frac{5625}{15^2}$$

$$= \frac{5625}{225}$$

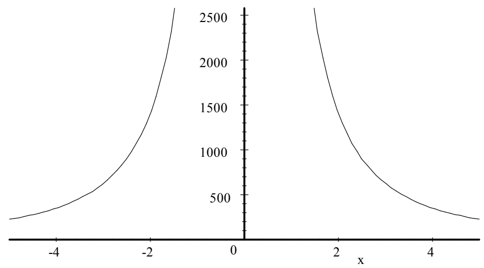
$$= 25$$

Por consiguiente, la intensidad en un punto a 15 m de la fuente es 25 cd.

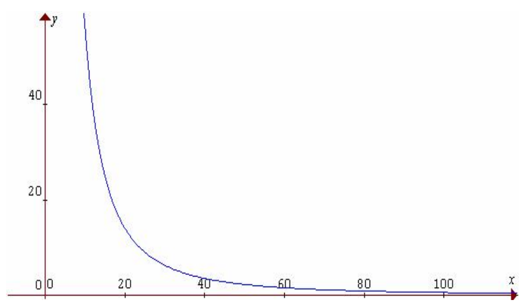
De esta manera, la función que modeliza la situación es la función de proporcionalidad inversa:

$$f(x)=\frac{5625}{x^2}$$

Su gráfica es la siguiente:



Considerando el dominio para el problema, o sea x > 0 se tiene el siguiente grafico



Desarrollaremos a continuación algunos modelos matemáticos:

III.2.- El modelo cuadrático

1).-*La velocidad de un móvil.*

Representemos con s(t) la altura alcanzada por un objeto lanzado hacia arriba, en función del tiempo transcurrido. s(t) se identificará como la función posición.

Si despreciamos la resistencia del aire, la física nos enseña que esta función posición puede ser modelizada de la siguiente manera:

$S(t)=\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$,

Donde g es la aceleración de la gravedad, v_0 la velocidad inicial y s_0 la altura inicial.

El valor de la aceleración de la gravedad depende de la altura donde cae el objeto. Tomaremos para g un valor aproximado de $-9.8m/s^2$.

Consideremos la siguiente situación:

Se lanza un cuerpo hacia arriba en dirección vertical con una velocidad de 98 m/s desde el techo de un edificio de 100 m de altura. Encontrar: i) la máxima altura que alcanza sobre el suelo, ii) el tiempo necesario para alcanzarla, iii) la velocidad al llegar al suelo y iv) el tiempo total transcurrido hasta que el cuerpo llega al suelo.

Solución:

i) Para calcular la máxima altura alcanzada basta reemplazar los valores de la expresión que modeliza el espacio recorrido

S(t)= $\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$

S(t)= - $\frac{1}{2}9.8\frac{m}{s^2}t^2 + 98\frac{m}{s}t + 100m$ (1)

En el cual nos falta conocer el tiempo.

Para calcularlo, tengamos en cuenta que la velocidad final alcanzada en el tiempo t se modeliza a través de: $v(t) = v_0 - g\,t$ reemplazando los datos queda

v=98-9.8.t

En el punto de máxima altura v =0;

Luego $98-9.8t_0=0$ de donde t=10s

Volviendo a la ecuación (1)

Tendremos s(t) = $-\frac{1}{2}9.8\frac{m}{s^2}.(10s)^2 + 98\frac{m}{s}.10s + 100m$

S(t)= 590 m

ii) Para calcular el tiempo necesario para que el cuerpo llegue al suelo, pondremos s=0

Luego $0=100m + 98m/s.\ t - 4.9m\ t^2$

Ecuación de segundo grado que al ser resuelta no da las siguientes raíces

t=-0.96s y t=20.96s

La respuesta negativa corresponde a un tiempo previo al del disparo (t=0) y debe ser descartado.

iii) Para obtener la velocidad que desarrolla el cuerpo al llegar al suelo, introducimos el valor t=20.96 s en la expresión.

V=98-9.8t

V=98 m/s-9.8m/s^2 x 20.96 s

$= -107.4 \frac{m}{s}$

Donde la velocidad negativa significa que el cuerpo se desplaza hacia abajo.

2) Ejemplos ecológicos

i).-En un bosque un depredador se alimenta de su presa y para las primeras 15 semanas a partir del fin de temporada de caza, la población de depredadores es una función f de x, el número de presas en el bosque, lo cual, a su vez, es una función g de t, el número de semanas que han pasado desde el fin de temporada de caza.

f(x)= $\frac{1}{48}x^2 - 2x + 50$ y g(t)=4t+52, donde $0 \leq t \leq 15$, encontrar:

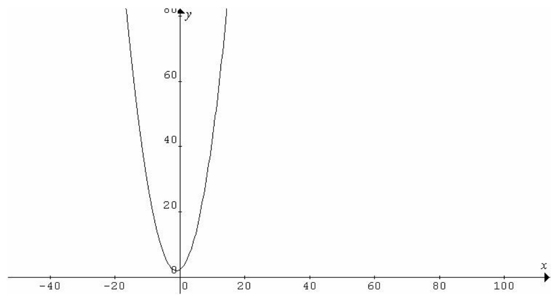
i).- El modelo matemático que exprese la población de depredadores como una función del número de semanas a partir del fin de temporada de caza.

ii) Determine la población de depredadores 11 semanas después de cierre de la temporada de caza.

Solución:

Para obtener el modelo matemático que exprese la población de depredadores como una función del número de semanas a partir del fin de temporada de caza, debemos componer ambas funciones f$\circ$g que nos expresará f en función del número de semanas.

Si efectuamos la composición $f(4t+52)=\frac{1}{48}(4t+52)^2-2(4t+52)+50$, obtendremos la función que es el modelo matemático buscado, cuya gráfica es la siguiente:



ii) Para determinar la población de depredadores 11 semanas después del cierre de temporada de caza basta obtener f(11) lo que da 50, que es el número de depredadores después de la semana 11.

ii).-El número máximo de bacterias que pueden sobrevivir en un medio específico es de 900.000, y la velocidad de reproducción de las bacterias es conjuntamente proporcional al número presente y a la diferencia entre 900.000 y el número actual.

a) Sea f(x) bacterias por minuto la velocidad de reproducción cuando hay x bacterias presentes, escriba una ecuación que defina a f(x).
b) ¿Cuál es el dominio de f?

Solución:

Según el problema, f(x) representa la velocidad de reproducción de las bacterias y es directamente proporcional tanto al número presente de bacterias como a la diferencia entre 900.000 y el número actual.

Si representamos con x el número actual, esta proporcionalidad se expresa:

a) $f(x) \propto x\,(900.000-x)$

Relación que me permite obtener la función de proporcionalidad

$$f(x) = k\,x\,(900.000-x),$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

La expresión es el modelo matemático de la situación.

b) El dominio de la función es [0 , 900.000]

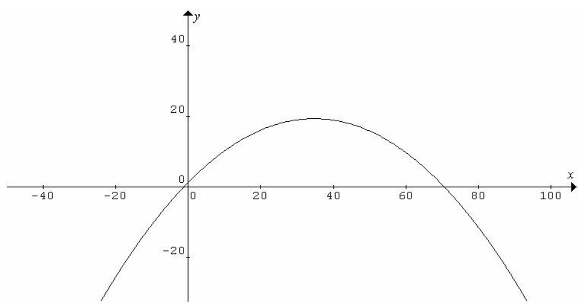
3) Relación entre diámetro y altura de árboles.

El modelo cuadrático sirve para expresar la relación entre el diámetro y la altura de la especie arbórea Pinus Radiata. Este modelo cuadrático puede escribirse de la siguiente manera:

$$f(x)=1.04x-0.015x^2+1.3,$$

donde la variable independiente es el diámetro y la altura está dada en función del mismo.

Su gráfico aproximado es el siguiente



Se observa que la concavidad de la curva hacia abajo está dada por el signo del coeficiente principal del polinomio de segundo grado que define la función.

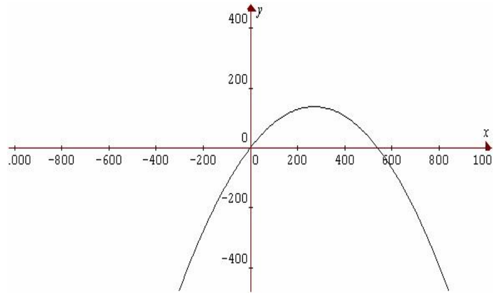
4) Relación entre la altura promedio y la altura máxima de árboles.

Un lote de *Pinus Radiata* tomada como muestra en una investigación arrojó resultados que permitieron relacionar la altura promedio y la altura máxima alcanzada por el árbol mediante una función cuadrática, donde la altura máxima es la variable dependiente y la altura media la independiente.

La ecuación de regresión obtenida en dicha investigación es la siguiente:

$H_t= 0.270 + 1.0158\ h_m-0.001881\ h_m^2$

Y el gráfico aproximado que expresa dicha relación es:



III.3.- El modelo potencial.

1).- Ley de crecimiento de un árbol.

Investigaciones realizadas (Falco,J, 2001) muestran que el crecimiento de un árbol en función del tiempo transcurrido puede modelizarse a través de una función potencial ya que la misma es la que mejor se ajusta a los datos experimentales.

Con los datos obtenidos en la experiencia se ve que el crecimiento es proporcional al tiempo en que dicho crecimiento tiene lugar, elevado a una constante cuyo valor se determina en dicha experiencia.

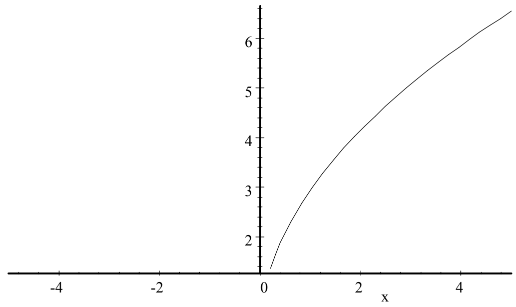
Este hecho puede simbolizarse de la siguiente manera: $y \propto t^{0.4978}$

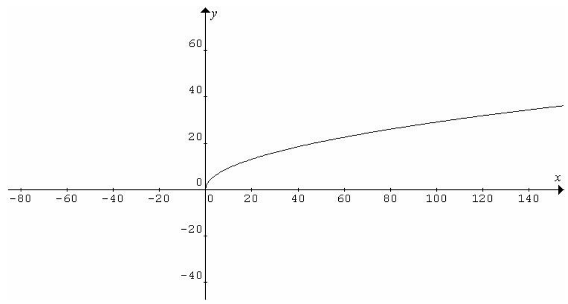
Donde y, la variable independiente representa la altura, en metros, que alcanza el árbol y t, la variable independiente, el tiempo transcurrido para que dicho crecimiento se dé.

Con el propósito de expresar la situación a través del modelo matemático, se determinó la constante de proporcionalidad 2.9374, obteniéndose la expresión y=.2.9374 $t^{0.4978}$ que se corresponde a un modelo de tipo potencial.

y=2.9374*x^0.4978

Se dan dos gráficos aproximados obtenidos con graficadores distintos.





Esta función responde a las curvas que tienen por ecuación la expresión $y=ax^{n}$, es decir a las funciones potenciales.

En la práctica se plantea el problema de cuantificar los parámetros a y n.

Según el valor del exponente n se puede distinguir dos clases de curvas: las parabólicas si n es positivo y las hiperbólicas si n es negativo.

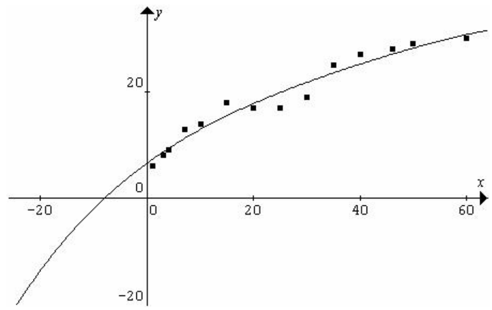
Como en este caso n es positivo estamos ante una curva de tipo parabólica, que tiene su concavidad hacia abajo ya que n es menor que 1.

2) Crecimiento de una mancha de aceite.

Una experiencia de laboratorio[1] permitió modelizar el crecimiento del diámetro de una gota de aceite de cocina flotando en el agua contenida en un recipiente, a partir del incremento de su volumen mediante el agregado de gotas con la ayuda de un gotero.

Los resultados de la experiencia fueron volcados en un gráfico como el siguiente:

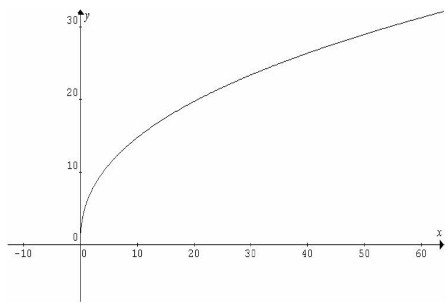
[1] Luini, M; Grecco, José, (2002) *Modelización de un derrame de petróleo.*

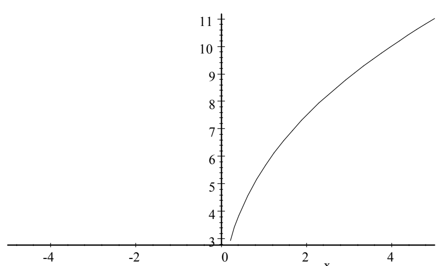


Del estudio de dicho gráfico se observa la dependencia lineal del diámetro (D) respecto a una potencia del número de gotas (N).

Esto se expresa $D \propto N^b$.

A partir de los datos de la experiencia, y usando escalas logarítmicas, se logró ajustar la misma al modelo potencial $D = aN^b$, obteniéndose para a el valor 5.6 mm; que representa el valor del diámetro de la mancha cuando el agua contiene una sola gota de aceite y b=0.42





De hecho, como en el caso anterior se trata de un modelo potencial parabólico con concavidad hacia abajo por ser 0< b <1.

b suele llamarse "exponente de escala" y define la escala de variación de D según varía t.

Esto es, si t se multiplica por un factor f, y cambiará consecuentemente f veces.

El significado físico de la constante a, es el de representar el valor que toma y cuando x vale la unidad. La dimensión de a es tal que da la homogeneidad dimensional de la ecuación.

III.4.- El modelo exponencial.

La función exponencial sirve para modelizar una gran cantidad de situaciones de la ciencia.
Consideremos algunas:

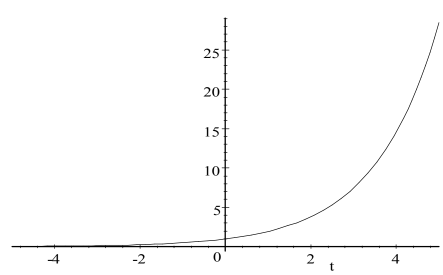
1).- Modelos de crecimiento exponencial continuo

Si y es una función derivable de t, tal que y>0 e y' =ky, para alguna constante k, entonces

$$y=Ce^{kt}$$

C es el valor inicial de y, y k es la constante de proporcionalidad. Es crecimiento exponencial cuando k>0 y decrecimiento exponencial cuando k<0.

La grafica de la función $y=C\,e^{kt}$ es:



Esto nos dice que los modelos dinámicos se expresan frecuentemente en forma de ecuaciones diferenciales, en las que el tiempo es una variable continua que repercute de esta forma en la densidad de la población.
La expresión del modelo de crecimiento exponencial de una población aislada está dada entonces por la expresión

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Que es una ecuación diferencial.

El primer término representa la *tasa de cambio de la población.* El parámetro r es el factor multiplicador que opera sobre la densidad de la población en el instante t, descripta por N.

La resolución de la ecuación diferencial nos permite obtener la función

$$N_t = N_0 e^{rt}$$

Ecuación que predice la densidad de la población en cualquier momento, a partir de la densidad inicial N_0 y la tasa de intrínseca de crecimiento; r es una constante en el modelo de crecimiento exponencial

2).- Un modelo de crecimiento exponencial.

El ritmo de cambio de y es proporcional a y. Cuando t=0 , y=2. Cuando t=2, y=4. ¿Cuál es el valor de y cuando t=3?

Solución:

Como y´=ky, en virtud de los datos que se dan, es

$\frac{y'}{y} = k$ reemplazando y´ tenemos:

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{y} = k$$

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

Y luego integrando Ln y = k t con lo cual la expresión para y es:

$$y = C\ e^{kt}$$

Hallamos los valores de C y k utilizando las condiciones iniciales

$$2 = C.\ e^{0} \text{ de donde } C=2$$

Cuando t=0, y= 2

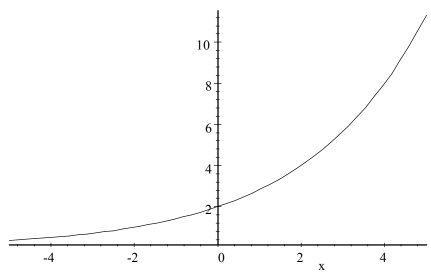
Cuando t=2, y=4

$$4=2\,e^{2k} \quad \text{de donde } k=\frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.3466$$

El modelo es $y=2\,e^{0.34661t}$

Cuando t=3 el valor de $y = 2\,e^{0.34661.\,3}$

La gráfica de $y=2\,e^{0.34661t}$ es la siguiente:



Crecimiento de una población

Supongamos que una población experimental de moscas de la fruta crece de forma exponencial. Había 100 moscas al final del segundo día del experimento y 300 al final del cuarto día. ¿Cuántas moscas había al comienzo?

Solución:

Sea $y=Ce^{kt}$ el número de moscas en el instante t, con t medido en días.

Como y=100 cuando t=2, y además y=300 cuando t=4, podemos escribir

$$100=Ce^{2k} \text{ y } 300= Ce^{4k}$$

Por la primera ecuación $C= 100\,e^{-2k.}$

Sustituyendo este valor en la segunda, se obtiene

$$300=100\,e^{-2k}.\,e^{4k}$$

$$400= 100\,e^{2k}$$

$$\ln 3=2k$$

$$½ \ln 3=k$$

$$\text{Luego } k\approx 0.5493$$

Por tanto, el modelo exponencial es $y=C.e^{0.5493t}$

Para determinar C volvemos a utilizar la condición y=100 cuando t=2

$$100=Ce^{0.5493(2)}$$

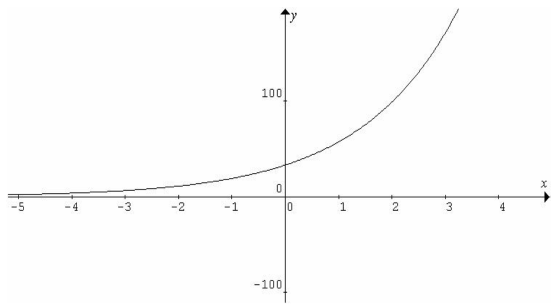
$$C=100e^{-1.0986}$$

Con lo cual $C \approx 33$

Así la población inicial (t=0) es de y=C=33

Luego $y=33\ e^{0.5493t}$

Cuyo gráfico es el siguiente:



3).Modelo de crecimiento y desintegración exponencial.

Cuando un elemento químico tiene isótopos radiactivos es porque puede presentarse en versiones inestables, es decir, con la característica de ir perdiendo los neutrones. El núcleo busca estabilidad y mientras esto ocurre se desprenden radiaciones espontáneamente, que pueden ser rayos alfa, beta o gamma.

La rapidez con que se desintegran los átomos de cada elemento es una constante específica que da cuenta de la estabilidad del isótopo, ya que cuando menor es la constante, mayor es la rapidez de desintegración y menos estable será el isótopo.

Cuando el núcleo radiactivo emite una radiación, se dirá que "decae" y llamaremos decaimiento radiactivo a dicho proceso.

La probabilidad con que decae el núcleo radiactivo, por unidad de tiempo, se conoce como "constante de decaimiento y se simboliza con λ.

La desintegración radiactiva se emite en términos de "semivida", que es el número de años que ha de transcurrir para que se desintegre la mitad de los átomos iniciales de una muestra.

La semivida de los isótopos radiactivos ya están calculadas.

Por ejemplo, la de algunos isótopos radiactivos comunes son:

Uranio	4.510.000.000 años
Plutonio	24.360 años.
Carbono	5.730 años

Además, la vida media y la constante de decaimiento se relacionan de la siguiente manera: $t = \frac{1}{\lambda}$.

Identificaremos, además, el período de semidesintegración o vida mitad (T_{sdt}) de un isótopo radiactivo, al tiempo que transcurre para que se desintegren la mitad de los átomos de la muestra. Esta es una medida de la estabilidad del isótopo, ya que cuando menor es la vida media, con mayor rapidez se producirá la desintegración y menos estable será el isótopo.

El número de átomos que se desintegra en un intervalo de tiempo es proporcional al número de átomos presentes no desintegrados, porque todos los átomos presente sen una muestra tienen la probabilidad de desintegrarse.

Podemos expresa resto matemáticamente del a siguiente manera:

$$\Delta n = -\lambda . n . \Delta t$$

Donde:

Δn: es la variación del número de átomos.

λ: es la constante de decaimiento antes mencionada.

N: es el número de átomos presente sen la muestra al comenzar la desintegración.

Δt: es la variación del tiempo.

Partiendo de esta igualdad y resolviendo la ecuación diferencial se obtiene, la siguiente fórmula que describe, con un modelo exponencial, la variación del número de átomos de una muestra, en función del tiempo transcurrido

$$n(t) = n_0 (0.5)^{\frac{t}{T_{sdt}}}$$

n_0 es el número de átomos de la muestra para t=0

La ecuación que modeliza estos fenómenos se corresponde con el modelo exponencial.

Veamos un ejemplo:

Supongamos que el accidente nuclear de Chernobil se liberaron 10 g de isótopos P_{U}-$_{239}$ de plutonio ¿Cuánto tiempo hará falta para que sólo quede un gramo?

Solución:

Designemos con y a la masa de plutonio en gramos. Como el ritmo de desintegración es proporciona la y, sabemos que

$Y=Ce^{kt}$,

Donde t se da en años.

Para hallar los valores de las constantes C y k, usamos las condiciones iniciales.

Como y=10 en t=0

$$10=Ce^{k(0)}=Ce^{0}, \text{ de donde } C=10$$

Además, como y=5 cuando t=24.360, concluimos que

$$5=10.\ e^{24.360k}$$

$$\frac{1}{2}=e^{24.360k}$$

Aplicando ln

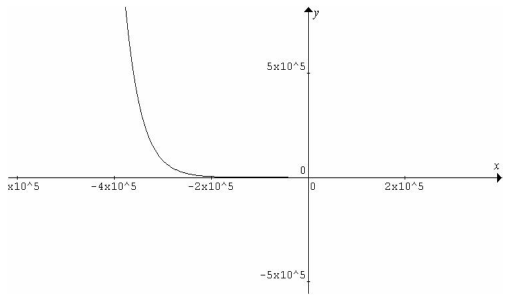
$$\text{Ln } \frac{1}{2}= 24.360 \text{ k. ln e}$$

De donde k= $\frac{1}{24.360}\ln\frac{1}{2}$ y k $\approx$-2,8454 x 10^{-5}

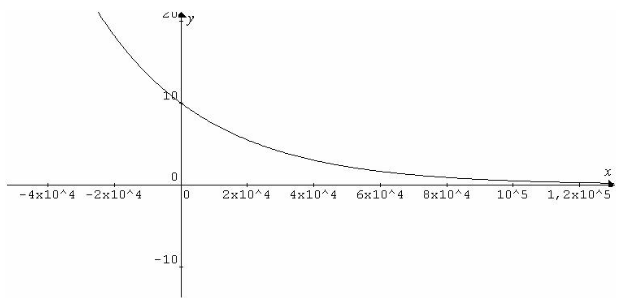
De donde el modelo de semivida es:

$$y=10\ e^{-0.000028454t}$$

Que se corresponde a un modelo exponencial cuyo gráfico es el siguiente:



Considerando el dominio t > 0, y una escala adecuada se observan los resultados determinados en la grafica



Para determinar el momento en que sólo restará 1 g, resolvemos la ecuación

$$1= 10 .e^{-0.000028454\ t}$$

Y obtendremos que la solución aproximada: 80.932 años.

Una función definida por una ecuación de la forma

$$f(t)=Be^{-kt},\ t\geq 0$$

Donde B y k son constantes, describe un decrecimiento exponencial. El decrecimiento exponencial se presenta cuando la rapidez de disminución de una cantidad es proporcional a su tamaño. Por ejemplo, se sabe experimentalmente que la rapidez de desintegración del elemento radio es proporcional a su cantidad presente en un instante dado.

Obsérvese que:

$$Be^{-kt} \to 0^{+} \quad \text{a medida que } t \to +\infty$$

Ejemplo:

La tasa de decrecimiento (rapidez de desintegración) del radio es proporcional a la cantidad presente en cualquier momento. La semivida del radio es de 1690 años y se tienen actualmente 20 mg de este elemento químico. (a) Si se tendrán y miligramos de radio dentro de t años, a partir de ahora, exprese y como una función de t. (b) Estime la cantidad de radio que se tendrá dentro de 1000 años a partir de ahora.

Solución:

(a) El modelo matemático consiste en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

Como k es una constante y y=20 cuando t=0., se tiene que

$$Y=20e^{kt}$$

Como y=10 cuando t=1690,

Se obtiene $10= 20\ e^{1690k}$

$$e^{1690k}= \frac{1}{2}$$

De donde $y = 20\ (e^{1690k})^{\frac{t}{1690}}$

Operando se obtiene:

$$Y = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1690}}$$

(b) Dentro de 1000 años, a partir de ahora, se tendrán 13.27 mg de radio

Otro modelo matemático que involucra potencias de e es el que se basa en la función definida por

$$f(t) = A(1-e^{-kt}), \quad t \geq 0$$

donde A y k son constantes positivas. Esta función describe un crecimiento limitado.

Puesto que

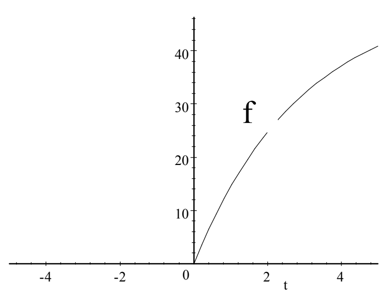
$$A(1-e^{-kt}) = A - A\,e^{-kt}$$

$$y\ A\,e^{-kt} \to 0^{+} \text{ a medida que } t \to +\infty$$

Por consiguiente, la recta que está a A unidades arriba del eje t es una asíntota horizontal de la gráfica de f. Observe también que

$$f(0)=A(1-e^{0})$$
$$= 0$$

La gráfica es la que se muestra a continuación..



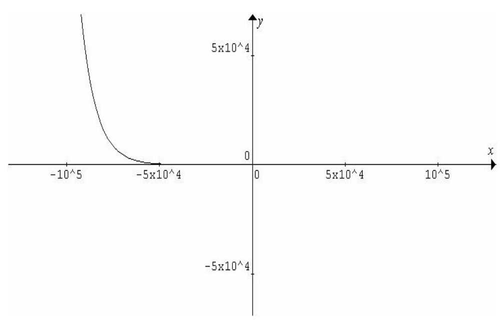
Semivida radioactiva

La semivida del carbono 14 es de unos 5.730 años. Si en una muestra hay actualmente 1 gramo de carbono-14. ¿Cuánto quedará al cabo de 10.000 años?

Solución:

Sean t=0 el momento actual y los gramos de C-14 en la muestra.

Tomando $\frac{1}{2}$ como base, el modelo que responde a la situación es y=$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$



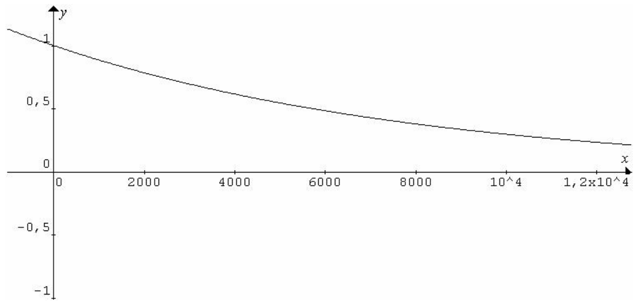
Cuando t=5.730, entonces y=$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5.730}{5.730}}=\frac{1}{2}g$

Cuando t=11.460, la cantidad se ha reducido a un cuarto de la cantidad inicial y así sucesivamente.

Para saber la cantidad que queda al cabo de 10.000 años sustituimos t=10.000 en el modelo y obtenemos:

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10.000}{5.730}}\approx 0.30g$$

Trabajando la gráfica con escalas adecuadas se observa este resultado



Relaciones hipsométricas.

La relación entre la altura y el diámetro de los árboles que conforman un bosque es de gran importancia en las estimaciones de los volúmenes de árboles y en la caracterización de la estructura de las masas arbóreas, entre otras utilidades.
Según Husch et al (1982), la altura (H) diámetro (dap) (diámetro de fuste a 1.30 m del suelo), de los árboles puede ser expresada a través de funciones matemáticas. Para ello se utiliza el dap promedio (DM) y la altura (HM) puesto que éstos resumen y representan, respectivamente, a todos los dap y las alturas del conjunto de árboles.
Algunas de estas relaciones se modelizan a partir de funciones exponenciales. Citaremos por ejemplo [2] las siguientes:

Ajuste exponencial I $\quad HM = B_0 * e^{\frac{B_1}{DM}}$

Modelo exponencial II $\quad HM = B_0 * e^{B_1 \cdot DM}$

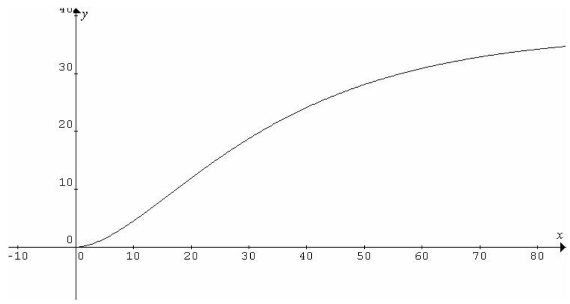
Modelo exponencial III $\quad HM = B_0 * DM^{B_1}$

Otros modelos describen los crecimientos e incrementos en altura y diámetro de algunos árboles según la edad de los mismos.

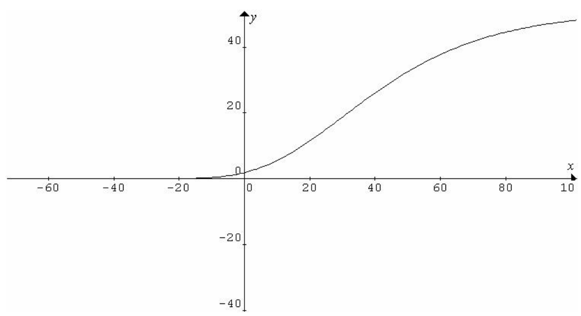
[2] Funciones extraídas de Costas R y Rodríguez, G. *Relaciones Hipsométricas promedio para Pinus elliottiEngl. Misiones y NE de Corrientes.*

Se ejemplifica con el modelo de Chapman-Richards como el mejor modelo que se ajusta a la relación edad-altura para la especie *Pinus herrerae*[3] *,* cuya expresión y gráfico son los siguientes.

$Alt= 37.18067157[1\text{-}exp^{-0.03863296\ edad}]^{1.88674927}$



$Diam=51.37343934exp^{-exp1.18405244-0,03947155edad}$



Se describió y caracterizó el crecimiento en altura y diámetro a 2.84 m de *Pinus herreare* a través de análisis troncales y regresión no lineal para una región de España. El modelo de Chapman-Richards predice el crecimiento en altura y el modelo de Gompertz muestra la relación edad-diámetro a 2.84 m

Otros modelos exponenciales

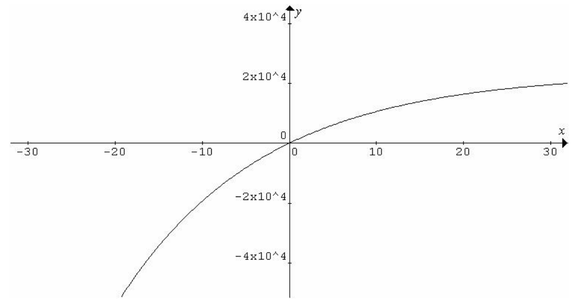
La relación entre la altura y el diámetro de otra especie arbórea, el *Pinus radiata* puede modelizarse a través de la siguiente ecuación:

$H=23505[1-exp\ (-0.0588x)]+13$

---

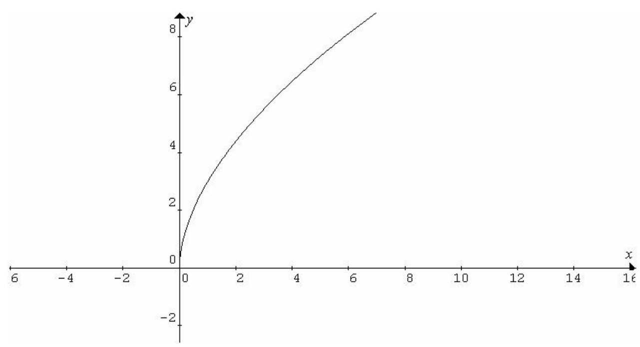
[3] Extraído de Calvillo Garcia, J; Cornejo Oviedo, E; Valencia Manzo, S y Flores Lopez, S. Crecimiento en altura y diámetro de árboles de *Pinus herrerae* Martinez en cd. Hidalgo, Michoacán.

Su gráfico aproximado es el siguiente:



Otro modelo que sirve para expresar la misma relación es la siguiente:

$$H = \exp\,(1.0993+0.5584\ln d)$$



Cultivo bacteriano

En un cultivo bacteriano existen inicialmente 1500 bacterias presentes en los t minutos, entonces $f(t)=Be^{0.04t}$, donde B es una constante.

Si hay 1500 bacterias inicialmente, ¿Cuántas habrá después de 1 hora?

Solución:

Puesto que inicialmente hay 1500 bacterias, f(0)=1500. De acuerdo con la ecuación que define a f(t),

$$f(t)=Be^{0.04(0)}$$

$$1500=Be^{0}$$

$$1500=B$$

Por lo tanto, con B=1500 se tiene

$$f(t)=1500e^{0.04t} \quad (1)$$

El número de bacterias después de 1 h es f(60) y, de acuerdo con la ecuación anterior:

$$f(60)=1500e^{0.04(60)}$$

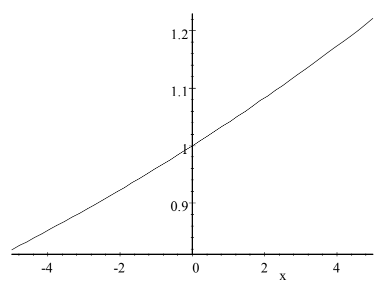
$$= 1500\ e^{2.4}$$

$$= 1500(11.023)$$

$$= 16.535$$

El gráfico aproximado de la función (1) es el siguiente.

y=1500*e^(0.04*x)



Por consiguiente, el cultivo consiste en un total de 16.535 bacterias después de 1h.

III.5.-El modelo logarítmico

Sea $f(t)=1500e^{0.04t}$

donde f(t) es el número de bacterias presentes en cierto cultivo después de t minutos cuando había 1500 bacterias originalmente presentes. Determine cuántos minutos transcurrirán para que el cultivo contenga 30.00 bacterias.

Solución:

Sea T el número de minutos transcurridos para que haya 30.000 bacterias presentes. Entonces, en la ecuación original sustituimos t por T para obtener

$$f(T)=1.500e^{0.04T}$$

Puesto que f(T) =30.000

$$30.000 = 1.500e^{0.04T}$$

$$20 = e^{0.04T}$$

Como la ecuación $x=e^y$ es equivalente a la ecuación $y=\ln x$, es obvio que $20=e^{0.04T}$ es equivalente a

$$0.04T=\ln 20$$

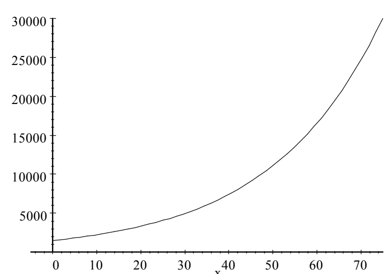
Como ln 20= 2.9957, es:

$$0.04T=2.9957$$

$$T=\frac{2.957}{0.04}$$

$$T=74.9$$

Esto quiere decir que se requiere que transcurra 1 h, 14 min y 54 s para que existan 30.000 bacterias.



III.6.-Situaciones problemáticas diversas

A continuación se da el enunciado de diferentes situaciones en las cuales pueden aplicarse los modelos analizados anteriormente.

1-Las ballenas azules recién nacidas miden alrededor de 24 pies de largo y pesan 3 tm. Los cetáceos jóvenes son amamantados durante 7 meses y, al momento del destete, muchos miden 53 pies de largo y pesan 23 tm. Denotemos con L y W la longitud en pies y el peso ton, respectivamente de una ballena de t meses de edad

a- Si L y t están relacionadas linealmente, exprese L en términos de t

b- ¿Cuál es el aumento diario en la longitud de una ballena joven? (usar 1 mes = 30 días)

c- Si W y t están relacionadas linealmente, exprese W en términos de t

d- ¿Cuál es el aumento diario en el peso de una ballena joven?

2- El fenómeno de la isla de calor urbano se ha observado en Tokio. El promedio de temperatura era de 13,5 ºC en 1915, y desde entonces ha subido 0,032 º C por año

a- Considere que la temperatura T (en ºC) esta linealmente relacionada con el tiempo t (en años) y que t = 0 corresponda a 1915 ; exprese T en términos de t

b- Pronosticar el promedio de temperatura para el año 2000

3- La presión P que actúa en un punto en un liquido es directamente proporcional a la distancia d desde la superficie del líquido al punto.

a- Expresar P como función de d mediante una fórmula con una constante de proporcionalidad de k.

b- En cierto tanque de petróleo, la presión a una profundidad de 2 pies es de 118 $lb/pies^3$. Encuentre el valor de k del inciso (a)

c- Hallar la presión a una profundidad de 5 pies para el tanque de petróleo del inciso (b).

4- La intensidad de iluminación I desde una fuente de luz varia en sentido inverso al cuadrado de la distancia d desde la fuente.

a- Expresar I en términos d y una constante de variación k
b- Un reflector tiene la intensidad de 1000 000 de bujías a 15 metros. De el valor de k del inciso (a)
c- Calcular la intensidad del faro de (b) a 1,6 Km.de distancia.

5- Supongamos que se atrapan 200 especímenes, se marcan y se sueltan entre la población de peces de un lago. Por T denota la cantidad de peces marcados que son recapturados cuando se pesca una muestra de n peces tiempo después. La validez del método de recaptura, para calcular la población total de especímenes del lago, se basa en la suposición de que T es directamente proporcional a n. Si se recapturan 10 ejemplares marcados de una muestra de 300, calcula la población total de especímenes del lago sabiendo que es directamente proporcional al producto entre la muestra y los marcados por primera vez, e inversamente proporcional a los recapturados.

6- En la tabla siguiente se lista la precipitación mensual promedio en pulgadas en una ciudad.

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sept	Oct	Nov	Dic
Precipitación	0.7	0.8	1.5	1.9	3.2	4.0	3.3	3.2	2.4	1.6	1.4	0.9

a. Graficar la precipitación mensual promedio
b. Elaborar un modelo matemático de estos datos con una función por partes f que sea primero cuadrática y luego lineal.
c. Graficar f junto con los datos.

7- La relación de Ehrenberg $\ln W = \ln 2{,}4 + (1{,}84)h$ es una formula empírica que relaciona la estatura h (en m) con el peso promedio W (en kg) para niños entre 5 y 13 años de edad

a- Expresar W como función de h, que no contenga ln
b- Calcular el peso promedio de un niño de 8 años que mide 1,5 metros

8- Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo. La cantidad de una cierta sustancia radiactiva que va quedando al pasar el tiempo t, viene dado por: $M = M(t) = M_0\, a^t$

Donde M_0 es la cantidad de sustancia que había en el instante que tomamos como inicial, y a es una constante ($0<a<1$), que depende de la sustancia en cuestión y de la unidad de tiempo que tomamos.

La rapidez de desintegración de las diferentes sustancias radiactivas se mide por el periodo de desintegración, que es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la masa inicial, y que naturalmente, no depende del instante que elijamos como inicial.

El periodo de desintegración del Radio es de 1620 años, deseamos encontrar el valor de a para que la expresión $M = a^t$ represente la evolución de un gramo de radio a lo largo del tiempo, tomando como unidad de tiempo 1000 años y como origen de tiempo el año 1800.

a) Calcular el valor de a. Para ello plantear que la masa a los 1620 años (1.62 unidades de tiempo), será la mitad de la del instante inicial.

b) ¿Qué cantidad de radio quedara en los años 2000, 3000, y 4000?

c) ¿Qué cantidad de radio había en el año 0, suponiendo que esa porción de Radio estuviera allí desde entonces?

d) ¿Cuándo quedaran 0.8 gramo de Radio?

e) ¿Cuándo había 1.5 gramos de Radio?

9-La población N de una ciudad pequeña en t años a partir de ahora se predice que será:

$$N = 20000 + \frac{10000}{(t+2)^2}$$

Determine la población a largo plazo

10-Para una relación particular de huésped-parásito fue determinado que cuando la densidad de huéspedes es x, el número de parásitos en un período está dado por y:

$$y = \frac{900x}{10+45x}$$

Si la densidad de los huéspedes aumentaría sin cota, a que valor se acercaría y?

BIBLIOGRAFÍA.

- APOSTOL, TOM. *Cálculus Vol I.* Editorial Reverté.
- BOCCO, MÓNICA. *Matemática Básica. Para las ciencias de la vida.* Editorial Triunfar. Córdoba.(2001).
- BOCCO, MÓNICA; PARMISARI, MARTA. *Serie Didáctica. Notas de Matemática para no Matemáticos. FAMAF*. Universidad Nacional de Córdoba. (2001).
- BRADLEY, GERALD Y SMITH KARL J: *Cálculo de una variable. Volumen 1*. Editorial Prentice Hall.
- CALVILLO GARCÍA, J; CORNEJO OVIEDO, E; VALENCIA MANZO, S; FLORES LOPEZ, C. *Crecimiento en altura y diámetro de árboles de Pinus herrerae Martinez en cd. Hidalgo. Michoacán.* Universidad Autónoma Agraria Antonio Navarro.
- COSTAS, R; RODRIGUEZ, G. *Relaciones Hipsométricas para Pinus Alliotti ENGL.* En Misiones y NE de Corrientes. El Dorado. Misiones.
- EDWARDS Y PENNEY: *Cálculo y Geometría Analítica*. Segunda Edición. Editorial Prentice Hall.
- HASSER J; LASALLE, J; SULLIVAN, J: *Análisis Matemático I*. Editorial Trillas.
- IBARRA DE GÓMEZ, ELSA; SANGUEDOLCE, JOSEFA; NABARRO DE GER, SILVIA.: *Ecuaciones Diferenciales.* Serie Didáctica N°11. Facultad de Ciencias Forestales.UNSE. Febrero de 2005
- LARSON, RON; EDWARDS, BRUCE *Cálculo I*. 7º Edición. Ediciones Pirámide.(2002)
- LARSON-HOSTETLER-EDWARDS.*Cálculo I.* Editorial Pirámide (2002).
- LEITHOLD, L. *El Cálculo.* Oxford University Press(1994).
- LEITHOLD, LOUIS: *El Cálculo con Geometría analítica*. Editorial Harla.México.

- PECE, M; BENITEZ, C; JUAREZ, M; MARIOT, V;SANGUEDOLCE, J; MAZZUCO,R.. *Ecuaciones altura-diámetro para Ziziphus mistol, Griseb en Santiago del Estero*..Facultad de Ciencias Forestales. UNSE(2006).
- PECE, M; BENITEZ, C; JUAREZ, M; MARIOT, V;SANGUEDOLCE, J; PRANZONI, O. *Modelación de la altura total para Quebracho colorado Santiagueño*. Facultad de Ciencias Forestales. UNSE (2006).
- PUIG, LUIS *La didáctica de la matemática como tarea investigativa.* Universidad de Valencia (1987*).*
- RABUFFETTI, HEBE: *Introducción al Análisis Matemático. Cálculo I*. Editorial Ateneo.
- RICO ROMERO, L. *Marco teórico de evaluación en Pisa sobre matemática y resolución de problemas*.(2003)
- SANGUEDOLCE, JOSEFA; IBARRA DE GÓMEZ, ELSA; NABARRO de GER: *Lógica Proposicional. Conjuntos Numéricos. Serie Didáctica N°19.Facultad de Ciencias Forestales. UNSE. Marzo de 2006.*

- STRANG, G.. *Algebra Lineal y sus Aplicaciones*. Editoral Addison Wesley Iberoamericana. (1982)
- SUAREZ ARROYO, B. *La formación en competencia: un desafía para la educación superior del futuro.* Universidad Politécnica de Cataluña.
- SVIERCOSKI FERREIRA, ROSANGELA, *Matemática aplicada Às ciencias Agrárias Análise de Dados e Modelos. Associaçao* Brasileira das Editoras Universitárias.(1999).
- THOMAS/ FINNEY *Cálculo con Geometría Analítica* Editorial Addison.Esley Iberoamericana.(1987)
- ZILL, DENNIS. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de modelado*. 6º Edición. International. Thomson Editores.(1997)