E-Book ISBN978-987-1676-32-3.
Fecha de catalogación: 19/12/2014.

SERIE DIDÁCTICA Nº 19

FACULTAD DE CIENCIAS FORESTALES
INGENIERO NÉSTOR RENÉ LEDESMA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO

CÁTEDRA DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

LÓGICA PROPOSICIONAL
CONJUNTOS NUMÉRICOS

EQUIPO DOCENTE
PROFESOR ASOCIADO:
JOSEFA SANGUEDOLCE

PROFESOR ADJUNTO:
ELSA IBARRA DE GOMEZ

AYUDANTE DIPLOMADO:
SILVIA N. DE GER

AYUDANTES ESTUDIANTILES:
JUAN PABLO ARGAÑARAZ
CARLA SALTO

ARTE DE TAPA: LIC. FEDERICO SORIA

MARZO 2006

"Los profesores de hoy tienen la difícil misión de enseñar a tener curiosidad, a pensar por uno mismo y a perderle el miedo a los problemas, mucho más que a enseñar unos cuantos teoremas o unas cuantas reglas operativas que el alumno, si ha mantenido su mente ágil y una sólida preparación básica, podrá leer sin dificultad de cualquier libro o manual el dia que lo necesite"

La Matematica en la escuela (1966) del Dr. Luís Santalo.

INTRODUCCIÓN

Al presentar esta primera Serie Didáctica en la cátedra de Álgebra y Geometría Analítica se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:
El alumno debe estar ya en condiciones de considerar las matemáticas como una ciencia lógica.
Los contenidos temáticos deberán ser desarrollados de manera que se adapten a la experiencia y madurez de un estudiante del primer año de la universidad.
La incorporación de los medios para desarrollar las habilidades que permitirán al estudiante acceder con mayor eficiencia a cursos más avanzados.

Teniendo en cuenta estos aspectos, con esta presentación se intenta reflejar el consenso de que las matemáticas deben tener significación y en consecuencia llevar a los estudiantes a una lectura y aprovechamiento por sí mismos de libros y textos específicos a la disciplina.

En el desarrollo de los capítulos se incluyen las explicaciones teóricas con ejemplos. Los temas desarrollados corresponden a Lógica Proposicional, Conjuntos

Numéricos, Conjuntos Ordenados y Principio de Inducción Completa. Se considera en la presentación de estos contenidos temáticos la valoración de la Matematica como disciplina para resolver problemas, en consecuencia se torna absolutamente necesario lograr un adecuado manejo del lenguaje matemático y la resolución de problemas durante el periodo de formación del estudiante del Ciclo Básico.

Asimismo el propósito de esta presentación es el de servir de guía en el proceso de aprendizaje de algunos contenidos del programa vigente de las asignaturas Álgebra y Geometría Analítica y Matematica I correspondientes al ciclo básico de las carreras de Ingeniería Forestal, Licenciatura de Ecología y Conservacion del Ambiente e Ingeniería en Industrias Forestales de la Facultad de Ciencias Forestales de la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

2005

Lic. Josefa Sanguedolce

INDICE

¿La búsqueda de la verdad te da tanto gusto como antes? Seguramente, no es el conocimiento sino el aprendizaje, no es la posesión sino la adquisición, no es el estar allí, sino el llegar hasta ahí, lo que aporta la mayor satisfacción.
Si he aclarado y agotado algo, lo dejo para entrar otra vez en la oscuridad. Así es ese hombre insaciable tan extraño: cuando ha completado una estructura no es para quedarse ahí confortablemente sino para empezar otra.

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

I.- CALCULO PROPOSICIONAL

I.1.- Introducción

La estructura actual de la matemática es formalista, es decir deductiva, desempeñando la axiomática un papel muy importante. Para la demostración matemática se dispone únicamente de los contenidos de los axiomas y de los recursos de la lógica.

La ***lógica*** es la ciencia que estudia los métodos y principios usados para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto.

En el siglo pasado, nuevos aportes dieron lugar a un desarrollo intensivo de la lógica, que sufrió una transformación completa y adoptó un carácter semejante al de una disciplina matemática. Nació así una nueva lógica, llamada también lógica matemática, formal, deductiva o simbólica

La lógica formal, considerada como el estudio de operaciones con símbolos apropiados, debe ubicarse en el álgebra como un capítulo especial; aparece entonces como una parte de la matemática.

Los capítulos más importantes de esta ciencia son: el cálculo proposicional, la teoría de la identidad, teoría de las clases y teoría de las relaciones.

A los efectos de este curso, resulta suficiente dedicar nuestro estudio al ***Calculo proposicional*** que nos permitirá familiarizarnos con el uso de las proposiciones y de las distintas operaciones lógicas que con ellos podemos efectuar, como asimismo a su representación simbólica.

I.2. - Proposiciones y Funciones proposicionales

El primer concepto que debemos fijar perfectamente es el de:

Proposición: es cualquier expresión para la cual tiene sentido inequívoco decir si es verdadera o falsa. Por ejemplo son proposiciones:

- 3 es un número entero (verdadero)
- 1,5 es un número natural (falso)

En cambio no son proposiciones, pues no podemos determinar si realmente son verdaderas o falsas, las siguientes expresiones:

- X + 1 = 5
- X es mayor que 2

Denotaremos con letras minúsculas a las proposiciones (generalmente las últimas del alfabeto); p, q, r, etc. y con V y F los términos verdadero y falso respectivamente, que serán llamados "valores de verdad" de las proposiciones.

I.3. -Proposiciones simples y proposiciones compuestas

Una proposición es ***simple*** cuando ninguna otra de sus partes es a su vez una proposición (manteniendo el significado de los términos). Por ejemplo son proposiciones simples:

p: Alberto escribe

q: El pizarrón es rectangular

Una proposición es ***compuesta*** cuando alguna de sus partes es a su vez proposición, manteniendo el significado de sus términos. Por ejemplo a partir de las proposiciones simples p y q podemos construir las nuevas proposiciones compuestas:

r: Alberto no escribe

s: Alberto escribe y el pizarrón es rectangular

t: Si Alberto escribe, el pizarrón es rectangular

De esta forma obtenemos las proposiciones compuestas combinando proposiciones simples por medio de las ***constantes lógicas***, que son palabras o expresiones como “no”, “y”, “o”, “si...entonces”, “si y sólo si”.

El significado de las constantes lógicas es independiente de las proposiciones que combinan.

I.4. -Conectivos lógicos y operaciones lógicas

Los ***conectivos lógicos*** son los símbolos con los que representamos las distintas constantes lógicas. Cada una de ellas nos permite definir una operación lógica.

Para representar las distintas operaciones lógicas entre proposiciones adoptaremos los siguientes símbolos:

Operación lógica	Constante lógica	Conectivo lógico
- Negación lógica	no	$\sim$
- Conjunción o producto lógico	y	$\wedge$
- Disyunción o adición lógica	o	$\vee$
- Implicación o condicional	si...entonces	$\Rightarrow$
- Equivalencia o bicondicional	si y sólo si	$\Leftrightarrow$

I.5. -Fórmulas proposicionales o fórmulas lógicas

Combinando proposiciones simples mediante los conectivos lógicos obtendremos ***fórmulas proposicionales***, cuyos valores de verdad se definen mediante tablas de verdad.

Dada una fórmula proposicional definiremos como ***variable proposicional*** a cada una de las proposiciones simples relacionadas a través de los conectivos lógicos que intervienen en dicha fórmula proposicional.

Fórmulas proposicionales o fórmulas lógicas son por ejemplo:

$$\sim p; \quad p \wedge q; \quad p \vee q; \quad p \Rightarrow q; \quad p \Leftrightarrow q \qquad \text{(I)}$$

Si realizamos ciertas combinaciones, obtenemos otras fórmulas más complejas, por ejemplo:

$$(p \vee q) \Rightarrow q; \quad (r \wedge t) \Leftrightarrow q; \quad \text{etc...}$$

En primer lugar determinaremos los valores de verdad de las fórmulas lógicas dadas en (I), construyendo la tabla de verdad.

I.5.1. -La negación lógica

Dada una proposición, podemos obtener su negación o refutación con ayuda de la palabra "no".

Dos proposiciones, de las cuales la segunda es la negación de la primera, se llaman ***contradictorias*** o ***antitéticas***.

Se puede prescindir de la palabra "no", anteponiendo a la proposición dada la expresión "no es cierto que". Por ejemplo, sea la proposición:

p: 1 es un número positivo

Su negación es: "1 no es un número positivo" o también: "no es cierto que 1 es un número positivo".

A la negación de la proposición p la simbolizamos así: ~ p.

Según que p sea verdadera o falsa, ~ p será respectivamente falsa o verdadera. Podemos resumir esto mediante un cuadro que se llama tabla de valores de verdad, o simplemente ***tabla de verdad*** de la negación.

p	**~p**
V	F
F	V

Por ejemplo: si p representa: $3 + 8 = 9$ (Falsa)

~ p representa: $3 + 8 \neq 9$ (Verdadera)

I.5.2. - Conjunción lógica (o producto o multiplicación lógica)

Es la unión de dos o más proposiciones por la palabra "y". Se la representa mediante el símbolo $\wedge$ colocado entre las proposiciones que afirmamos suceden simultáneamente. Sea por ejemplo:

p: Hace calor

q: Tengo apetito

La conjunción de ambas proposiciones es la proposición:

s: Hace calor y tengo apetito que se representa así: $s = p \wedge q$

Si suponemos que p y q son verdaderas, la conjunción es verdadera; pero si al menos una de las proposiciones simples que la componen es falsa, entonces la conjunción es falsa.

El siguiente cuadro define la conjunción:

p	**q**	**$p\wedge q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Por ejemplo a conjunción "3 + 5 = 8 y 8: 2 = 3" es falsa pues una de las componentes es falsa.

I.5.3. - Disyunción lógica (o adición lógica, o suma, o alternativa lógica)

Nos indica que por lo menos una de las proposiciones simples relacionadas por la palabra "o" debe ser verdadera.

La representamos mediante el símbolo colocado entre las dos proposiciones componentes, esto es: $p \vee q$ (que se lee: "p o q").

Para construir la tabla de verdad de la disyunción tenemos presente que sólo será falsa si las dos componentes son simultáneamente falsas. Habiendo al menos una de las componentes verdadera, la disyunción será verdadera, esto es:

p	**q**	**$p\vee q$**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Con esta acepción se considera la disyunción desde el punto de vista lógico, y se llama ***disyunción incluyente***.

Una segunda acepción, la ***disyunción excluyente***, considera que una proposición p $\vee$ q que se lee "o p o q" es verdadera si las proposiciones componentes asumen diferentes valores de verdad.

La disyunción excluyente de p y q viene definida por la siguiente tabla de verdad:

p	**q**	**p$\underline{\vee}$ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

I.5.4. - Condicional (o implicación)

Como en el caso de la disyunción, hay diferencias entre los usos de la implicación en lógica y en el lenguaje cotidiano.

En el lenguaje ordinario usamos la implicación en sentido formal; tendemos a unir dos proposiciones mediante las palabras "si..entonces" sólo si hay una conexión entre sus formas y sus contenidos; si suponiendo verdadero el antecedente nos vemos obligados a suponer verdadero el consecuente; si podemos deducir el consecuente a partir del antecedente, sobre la base de ciertas leyes.

Por ejemplo: Si Sócrates es un hombre, entonces Sócrates es mortal". En cambio en lógica, se utiliza la implicación en sentido material o ***implicación material***, la que tiene sentido aún cuando no exista ninguna especie de conexión entre sus dos miembros.

El símbolo p$\Rightarrow$q denota la proposición: si p entonces q, y la llamaremos condicional, la proposición p se llama antecedente y la proposición q es el consecuente del condicional

De esta forma, tiene sentido lógico enunciar:

"Si Sócrates es un hombre, entonces Sócrates es mortal".

"Si 2x2=5 entonces París es la capital de Francia".

La verdad o falsedad de una implicación material depende sólo de la verdad o falsedad del antecedente y consecuente.

La siguiente tabla de verdad determina los valores de verdad de p⇒q de acuerdo a los posibles valores de verdad de p y q.

p	**q**	**p ⇒ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Veamos ahora el uso y la importancia de la noción del condicional en matemática.

Demostrar o probar un condicional p ⇒ q significa poner en evidencia la imposibilidad de que siendo verdadero el antecedente p sea falso el consecuente q.

Es importante observar que para demostrar que un dado condicional p ⇒ q es verdadero es suficiente realizar uno de estos procedimientos:

i) suponer $\mathcal{V}(p) = \mathrm{V}$, verificar que $\mathcal{V}(q) = \mathrm{V}$

ii) suponer $\mathcal{V}(q) = \mathrm{F}$, probar que $\mathcal{V}(p) = \mathrm{F}$

<u>I.5.4.1. - Condición necesaria y suficiente</u>

En matemática aparecen condicionales que se prueban. Tales condicionales son denominados "teoremas".

En un teorema p ⇒ q, se llama; hipótesis a p y tesis a q. Por ejemplo sea el teorema:

"Si x es un número positivo, entonces 2x es un número positivo"; tiene la forma de un condicional, donde

"x es un número positivo" es la hipótesis y

"2x es un número positivo" es la tesis.

Podemos asimismo formular dicho teorema de las siguientes formas:

_ De: "x es un número positivo", le sigue: "2x es un número positivo".

_ La condición x es un número positivo, es suficiente para que 2x sea un número positivo.

_ Para que 2x sea un número positivo, es suficiente que x sea un número positivo.

_ La condición 2x es un número positivo, es necesaria para que x sea un número positivo.

_ Para que x sea un número positivo, es necesario que 2x sea un número positivo.

$p \Rightarrow q$: q es condición necesaria para la hipótesis.

p es condición suficiente para la tesis.

I.5.5.- Bicondicional

En algunos casos, como en el anterior ejemplo, ocurre que q es también condición suficiente para p, por lo que también es (V) el condicional $q \Rightarrow p$, es decir que p es además condición necesaria para q. En estas situaciones decimos que p es condición necesaria y suficiente para q y que q es condición necesaria y suficiente para p.

De esta forma introducimos el bicondicional $p \Leftrightarrow q$.

p	**q**	**$p \Leftrightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observamos que p $\Leftrightarrow$ q es una forma de expresar dos condicionales simultáneos:

p $\Rightarrow$ q y q $\Rightarrow$ p

Trataremos de fijar algunas pautas que nos permitan construir la tabla de verdad para cualquier fórmula proposicional, que podemos formar. Estas son:

i) Reconocer las variables proposicionales que intervienen en la fórmula proposicional formada; cada una de ellas encabezará una columna de la tabla.

ii) En general, si las variables intervinientes son "n" las alternativas posibles de valores de verdad son 2^n. De esta forma la tabla de verdad a construir tendrá 2^n renglones.

iii) Efectuar la distribución adecuada de cada uno de los valores que integran la fórmula proposicional. Cada una de esas partes encabezará una columna de la tabla, la última columna estará encabezada por la fórmula en su expresión completa.

iv) El valor de verdad que le corresponde a cada una de las partes de la fórmula proposicional dependerá de los valores de verdad asignados a las variables.

Sea por ejemplo la fórmula proposicional: (p $\vee$ q) $\Rightarrow$ q

Construyamos su tabla de verdad:

p	**q**	**p$\vee$ q**	**(p$\vee$ q) $\Rightarrow$ q**
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

Observemos:

i) La tabla de verdad posee cuatro renglones, puesto que nuestra fórmula proposicional posee dos variables proposicionales, luego $2^2 = 4$.

ii) Los valores de verdad de la fórmula proposicional $(p \vee q) \Rightarrow q$ son cuatro. Si fijamos nuestra atención en una de las filas, por ejemplo la segunda, vemos que: los dos primeros cuadriculados corresponden a una de las alternativas de valores de verdad de las variables p y q, en donde p es V y q es F; en el tercer cuadriculado ponemos el valor de verdad de $p \vee q$ que resulta: V; en el último cuadriculado del renglón el valor que tiene el condicional $(p \vee q) \Rightarrow q$ que es: F. De esto deducimos que la fórmula es falsa cuando la conjunción $p \vee q$ es: V y la variable proposicional q es: F.

I.6. - Fórmulas equivalentes

Sean las fórmulas proposicionales:

$$p \Leftrightarrow q \quad \text{y} \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Con estas dos fórmulas proposicionales dadas construyamos otra fórmula proposicional, esta es:

$$p \Leftrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)].$$

Construyamos su tabla de verdad:

P	**q**	**$p \Leftrightarrow q$ (1)**	**$p \Rightarrow q$**	**$q \Rightarrow p$**	**$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (2)**	**(1) $\Leftrightarrow$ (2) (3)**
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Observaciones:

i) Los respectivos renglones de las columnas 1 y 2 asumen los mismos valores de verdad para toda asignación de valores dados a las variables proposicionales.

ii) Los renglones de la columna 3 asumen el valor de verdad V cualesquiera sean los valores dados de las variables.

Las fórmulas proposicionales $p \Leftrightarrow q$ y $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ son equivalentes.

Definición: Una ***fórmula proposicional es equivalente*** a otra si ambas asumen los mismos valores de verdad para toda asignación de valores dados a las variables.

Para indicar que una fórmula es equivalente a otra, pondremos el signo $\equiv$ entre ellas, esto es: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Conviene tener presente los siguientes pares de fórmulas proposicionales equivalentes, que se llaman ***Leyes Lógicas***:

- Involución: $\sim(\sim p) \equiv p$

- Idempotencia: $\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$

- Leyes conmutativas: $\begin{cases} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee p \equiv q \vee p \end{cases}$

- Leyes asociativas: $\begin{cases} p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \end{cases}$

- Leyes distributivas: $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$

- Leyes de Morgan: $\begin{cases} \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee (\sim q) \\ \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge (\sim q) \end{cases}$

La fórmula proposicional: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ la hemos obtenido asociando el bicondicional a las fórmulas $(p \Leftrightarrow q)$ y $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ respectivamente.

En la observación ii) que se deduce de la tabla de verdad para dicha fórmula proposicional podemos dar la siguiente definición.

Definición: Una fórmula proposicional es ***tautología*** si y solo si asume el valor V cualesquiera sean los valores dados a las variables proposicionales.

Partiendo de esta definición diremos que dos fórmulas proposicionales son equivalentes si y sólo si el bicondicional asociado a ellas es una tautología.

Sea ahora la fórmula proposicional $p \wedge (\sim p)$. Construyamos su tabla de verdad.

p	**~p**	**p ∧ (~p)**
V	F	F
F	V	F

Vemos que cualesquiera sea la proposición a quien representa la variable proposicional con valores de verdad V o F la proposición $p \wedge (\sim p)$ es falsa. Por lo que podemos enunciar otra definición.

Definición: Una fórmula proposicional es ***contradictoria*** si y sólo si asume el valor F para cada asignación de valores dados a las variables proposicionales.

Por ejemplo la fórmula $p \wedge (\sim p)$ es contradictoria.

Definición: Una fórmula proposicional es ***contingente*** si y sólo si no es tautológica ni contradictoria.

<u>Implicaciones asociadas</u>

Sea la fórmula proposicional $p \Rightarrow q$ que la llamaremos <u>condicional directo</u>. A partir de este condicional directo podemos formar otras fórmulas proposicionales, a saber:

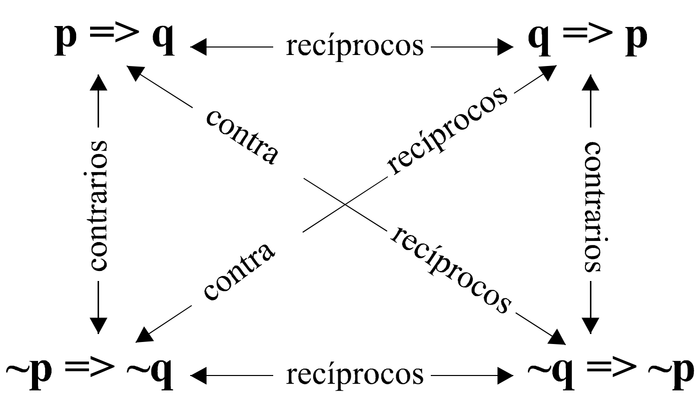
$q \Rightarrow p$

$\sim p \Rightarrow \sim q$

$\sim q \Rightarrow \sim p$

Estas implicaciones se llaman recíproco, contrario y contrarrecíproco, que junto a la condicional $p \Rightarrow q$ se denominan conjugadas y cualesquiera de ellas puede tomarse como condicional directo.

Podemos esquematizar lo expuesto de la siguiente forma:



Verifique que las implicaciones contrarrecíprocas son equivalentes, esto es:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$$

Observaciones:

i) Si la implicación directa es V, también lo es la contrarrecíproca, y no podemos afirmar la verdad de la recíproca o de la contraria.

ii) Si son verdaderos un condicional y su recíproco o contrario, entonces son verdaderos los cuatro, y las proposiciones antecedente y consecuente son equivalentes.

Se presentan dos métodos para demostrar la verdad del condicional $p \Rightarrow q$, a saber:

i) Directo

$\mathcal{V}(p) = F$, $p \Rightarrow q$ es V

$\mathcal{V}(p) = V$, hay que establecer que el $\mathcal{V}(q) = V$

ii) Indirecto

$\mathcal{V}(q) = V$, $p \Rightarrow q$ es V

$\mathcal{V}(q) = F$, hay que establecer que el $\mathcal{V}(p) = F$

Las matemáticas no se ocupan de objetos, sino de relaciones entre objetos: de esta manera tienen la libertad de reemplazar algunos objetos por otros, siempre y cuando las relaciones no se alteren. El contenido es para ellos irrelevante; se interesan únicamente en la forma.

Henri Poincaré

II.- Elementos de la Teoría de Conjuntos

II.1. - Esquemas proposicionales (Funciones o formas proposicionales)

Sean las expresiones:

"x – 1 = 3"

"x es sordo"

"x compuso sinfonías"

Observamos que las mismas no son proposiciones puesto que figura en cada una de ellas una indeterminada y por tanto, no puede decirse nada respecto a la verdad o falsedad de cada una de ellas.

Estas expresiones se denominan ***esquemas proposicionales*** (o funciones o formas proposicionales), en la indeterminada x, mientras que la expresión:

"x vivió después que y"

es un esquema proposicional en las indeterminadas x, y.

Pongamos:

p(x): "x – 1 = 3"

q(x): "x es sordo"

r(x): "x compuso sinfonías"

s(x,y): "x vivió después de y"

Un esquema proposicional se transforma en proposición verdadera o falsa, sustituyendo las indeterminadas por adecuadas especificaciones concretas. Por ejemplo:

p(4): "4 – 1 = 3"   p(2): "2 – 1 = 3"

r(Mozart): "Mozart compuso sinfonías"

s(Newton, Galileo): "Newton vivió después que Galileo"

s(Galileo, Newton): "Galileo vivió después que Newton"

Se tiene:

$\mathcal{V}[p(4)] = $ V $\qquad\qquad$ $\mathcal{V}[r(\mathcal{M}ozart)] = $ V

$\mathcal{V}[p(2)] = $ F $\qquad\qquad$ $\mathcal{V}[s(\mathcal{N}ewton, \mathcal{G}alileo)] = $ V

$\mathcal{V}[s(\mathcal{G}alileo, \mathcal{N}ewton)] = $ F

Ahora bien, sea por ejemplo el esquema proposicional: p(x): “x es rubio”

Hemos dicho que al sustituir la indeterminada x por un nombre determinado, convierte al esquema proposicional p(x) en una proposición verdadera o falsa, si sustituimos a x por Luis, resulta:

p(Luis): “Luis es rubio”

Pero si hacemos p(Bs. As.): “Bs. As es rubio”, observamos que esta última expresión no resulta una proposición, pues carece de sentido.

Esto nos lleva necesariamente al concepto de conjunto universal o conjunto referencial. Para ello previamente demos una idea intuitiva de <u>Conjunto:</u> como colección o agrupación de entes de naturaleza arbitraria a los que denominamos elementos del conjunto en cuestión.

Si A es un conjunto y h designa un elemento de A, pondremos h $\in$ A, o bien h $\notin$ A.

Definir o <u>determinar un conjunto concreto</u> es <u>fijar</u> un criterio por el que resulte posible establecer <u>exactamente</u> cuales son sus elementos. Habitualmente se fija previamente un conjunto U al que llamaremos ***Universal*** o ***Referencial***.

Dado un referencial U y una función proposicional p(x) con la propiedad: a $\in$ U $\Rightarrow$ p(a) es una proposición (V o F) entonces queda determinado un conjunto que designamos con L de este modo:

u $\in$ L $\Leftrightarrow$ (u $\in$ L $\wedge$ $\mathcal{V}[p(u)] = $ V) $\qquad$ (1)

Esta manera de definir conjuntos es por ***comprensión***.

Si p(x) es una función proposicional en la indeterminada x tal que:

$s \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{V}[p(s)] = V$, entonces el conjunto definido por $(t \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}[p(t)] = V)$

es el ***conjunto vacío***.

II.2. -Igualdad de Conjuntos. Inclusión y pertenencia

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es igual a B y pondremos A = B si y sólo si verifica:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Esto es:

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

En lugar de la expresión (1) pondremos:

$$L = \{u / (u \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}[p(u)] = V\} \qquad (2)$$

La (2) se abrevia: $L = \{u / (u \in \mathcal{U} \wedge p(u))\}$

Luego el Referencial está sobreentendido $\mathcal{U} = \{u / p(u)\}$

Algunos conjuntos pueden definirse por extensión "listando" los símbolos que representan a sus elementos.

Por ejemplo: $\{t\}$ representa un conjunto unitario.

$\{r, s\}$ representa un conjunto que tiene dos elementos r y s tal que $\{r, s\} = \{s, r\}$

Diremos que $\{r, s\}$ es un par, análogamente pueden considerarse ternas, cuaternas, quíntuplas, etc.

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, diremos que el conjunto A está incluido en el conjunto B, o que el conjunto A es parte o subconjunto del conjunto B y pondremos $A \subset B$ si y sólo si:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Es decir: $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Algunas consideraciones que debemos tener en cuenta:

i) Sea A un conjunto cualquiera, entonces $A \subset A$

ii) Sea A un conjunto cualquiera, entonces $\emptyset \subset A$, esto es: $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$

Observamos que el valor de verdad del antecedente $x \in \emptyset$ es F, cualquiera sea el valor de verdad del consecuente $x \in A$, el valor de verdad que asume el condicional es V.

iii) Sean A y B conjuntos tales que $A \subset B$ y además $A \neq B$. En tal caso diremos que el conjunto A es parte propia del conjunto B.

iv) Recordemos que las fórmulas proposicionales $p \Leftrightarrow q$ y $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$ son equivalentes, esto es:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$$

y además sabemos que:

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Resulta:

$$A = B \Leftrightarrow [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

O sea:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

II.3. -Operaciones con formas (o funciones) proposicionales. Conjuntos de verdad

Sean p(x) y q(x) dos formas proposicionales en la indeterminada x, con P y Q sus respectivos conjuntos de verdad y U el referencial, podemos expresar nuevas formas proposicionales en la misma indeterminada y encontrar sus respectivos conjuntos de verdad, a saber:

1.- La forma proposicional ~p(x) resulta ser la negación de la función proposicional p(x).

Podemos determinar el conjunto de verdad de la función (o forma) proposicional p(x), esto es:

$$\{a \,/\, {\sim}p(a) \text{ es V}\} = \{a \,/\, p(a) \text{ es F}\} = \{a \,/\, a \notin P\} = P'$$

2.- La forma proposicional $p(x) \wedge q(x)$ resulta ser la conjunción de las formas proposicionales p(x) y q(x).

El conjunto de verdad de la forma proposicional $p(x) \wedge q(x)$ viene dado por:

$\{a / p(a) \wedge q(a) \text{ es V}\} = \{a / p(a) \text{ es V y } q(a) \text{ es V}\} = \{a / a \in P \wedge a \in Q\} = P \cap Q$

3.- La forma proposicional $p(x) \vee q(x)$ resulta ser la disyunción de las formas proposicionales $p(x)$ y $q(x)$.

El conjunto de verdad de la forma proposicional $p(x) \vee q(x)$ viene dado por:

$\{a / p(a) \vee q(a) \text{ es V}\} = \{a / p(a) \text{ es V o } q(a) \text{ es V}\} = \{a / a \in P \vee a \in Q\} = P \cup Q$

De idéntica manera podemos formar las dos últimas formas proposicionales:

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

a las que denominaremos condicional y bicondicional de las formas proposicionales dadas respectivamente.

Teniendo en cuenta los conjuntos de verdad ya considerados para las formas proposicionales $p(x)$ y $q(x)$, podemos obtener los conjuntos de verdad de las nuevas formas proposicionales, a saber:

$\{a / p(a) \Rightarrow q(a) \text{ es V}\} = \{a / p(a) \text{ es F o } q(a) \text{ es V}\} = \{a / a \notin P \vee a \in Q\} = P' \cup Q$

Conjunto de verdad de la forma proposicional $p(x) \Rightarrow q(x)$

$\{a / p(a) \Leftrightarrow q(a) \text{ es V}\} = \{a / p(a) \Rightarrow q(a) \text{ es V y / } q(a) \Rightarrow p(a) \text{ es V}\} =$

$= \{a / a \in P' \cup Q \text{ y } a \in Q' \cup P\} = (P' \cup Q) \cap (Q' \cup P)$

Conjunto de verdad de la forma proposicional $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

II.4. -Funciones proposicionales. Cuantificadores

Sea la función proposicional:

$$p(x): x + 4 < 10 \quad U = IR$$

Observamos que el conjunto de verdad es $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

En este ejemplo la función proposicional $x + 4 < 10$ resultará verdadera para algunos números naturales. En otras palabras, existen algunos números naturales que hacen de p(x) un enunciado verdadero.

Simbólicamente se expresa:

$$\exists\ x \in IN \ / \ p(x)$$

El símbolo $\exists$ (x) se llama cuantificador existencial afirmativo y se lee "existe al menos un x".

Veamos otro ejemplo:

$$p(x): x < x + 1 \quad U = IN$$

Si nos proponemos encontrar el conjunto de verdad reemplazaré a x por los números naturales comenzando por el 1 y veré que:

Para x = 1; 1 < 2 y p (1) es V

Para x = 2; 2 < 3 y p (2) es V

Resulta que para todo $x \in IN$, la proposición es V.

Simbólicamente se expresa:

$$\forall\ x \in IN: p(x)$$

El símbolo $\forall$ x lo llamo cuantificador universal afirmativo.

Si se pretende cuantificar la función proposicional: $z + 4 < 10$ de modo que esta resulte falsa, deberé establecer:

$$\forall\ z \in IN: z + 4 < 10$$

Si esto es falso, su negación es verdadera:

"No es cierto que, para todo número natural, z + 4 < 10"

En símbolos se expresa:

$$\sim[\forall\ z \in IN: z + 4 < 10]$$

Pero esto es equivalente a decir: “Existen algunos números naturales que no verifican a $z + 4 < 10$”. Cosa que es cierta:

6, 7, 8,... son naturales que hacen de $p(z)$ un enunciado falso.

$$\sim[\forall\, z \in \mathbb{N}: z + 4 < 10] \Leftrightarrow \exists\, z \,/\, \sim(z + 4 < 10)$$

Nos dice:

La negación de un cuantificador universal es un cuantificador existencial respecto de la función proposicional negada.

Por lo dicho, las funciones proposicionales cuantificadas pueden ser verdaderas o falsas, lo que significa que adquieren el carácter de proposición.

$\forall\, x: p(x)$ es V $\Leftrightarrow$ son verdaderas todas las proposiciones que se obtienen al reemplazar la variable x por cada uno de los elementos pertenecientes al conjunto donde está definida $p(x)$ y $\forall\, x: p(x)$ es falso, si al menos una de las proposiciones resulta falsa.

$\exists\, x \,/\, p(x)$ es V $\Leftrightarrow$ es verdadera por lo menos una de las proposiciones que se consiguen al sustituir a “x” por los elementos del universo donde esta definida $p(x)$, y falsa sino se obtiene ninguna proposición verdadera.

Equivalencias:

$\forall\, x: p(x) \Leftrightarrow \sim [\exists\, x \,/\, \sim p(x)]$

$\sim[\forall\, x: p(x)] \Leftrightarrow \exists\, x \,/\, \sim p(x)$

$\exists\, x \,/\, p(x) \Leftrightarrow \sim[\forall\, x: \sim p(x)]$

$\sim[\exists\, x \,/\, p(x)] \Leftrightarrow \forall\, x: \sim p(x)$

El gran matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), con su monumental Disquisitions Arithmeticae, aparecido en 1801, cuando tenía 24 años, fijó las bases fundamentales de la moderna teoría de Números. En algún sentido uno observa que la aritmética antes de Gauss, más que una ciencia, parece una suerte de hechos aislados y en anecdóticos y que Gauss la eleva a su verdadera dimensión científica.

Aritmética Elemental en la formación Matemática.
Dr. Enzo R. Gentile, (1928-1991)

III. - Conjuntos Numéricos

III.1. Los Números Naturales

Designamos con IN al conjunto de los números naturales. Sin considerar su origen, el conjunto de los números naturales es presentado por:

$$IN = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

El conjunto así ordenado de todos los números naturales recibe el nombre de sucesión fundamental; esta sucesión forma un conjunto infinito debido a que cada número de ella tiene siempre un siguiente inmediato o sucesivo. Por esta razón al representar la sucesión fundamental hemos puesto puntos suspensivos a la derecha del último número representado para indicar que le siguen muchos números. Si a la representación anterior se le agrega el cero, se tiene:

$$IN_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

III.1.1. Características del conjunto de Números Naturales

- Es ordenado
- Tiene primer elemento y no tiene último elemento
- Cada elemento tiene un sucesor
- Es discreto, esto quiere decir que entre dos números naturales existe un número finito de números naturales.

III.1.2. Orden en el conjunto de los números Naturales

El orden en los naturales se encuentra definido por:

$$a < b \overset{def}{\Leftrightarrow} b > a$$

$$a \geq b \overset{def}{\Leftrightarrow} (a > b \vee a = b)$$

Nota: El signo $\langle$ se lee: "menor que"

El signo $\geq$ se lee : "mayor o igual que"

Ley de Tricotomía

Dados dos números naturales a y b se verifica una y solo una de las tres posibilidades siguientes:

a) $a = b$ en cuyo caso $a \not\langle b$ y $a \not\rangle b$

b) $a \langle b$ en cuyo caso $a \neq b$ y $a \not\rangle b$

c) $a \rangle b$ en cuyo caso $a \not\langle b$ y $a \neq b$

Cada una de estas tres posibilidades excluye a las otras dos.

III.1.3. La adición y multiplicación en los Números Naturales

En los naturales están definidos dos operaciones denotadas por **(+)** y **(•)** y denominadas *suma y producto* de naturales.

+ : IN x IN → IN

(a, b) → a + b

• : IN x IN → IN

(a, b) → a • b

Propiedades de las operaciones (+) y (•) definidas en los Naturales

+	•
Ley de Cierre	
$a,b \in IN_0 \Rightarrow a+b \in IN_0$	$a,b \in IN_0 \Rightarrow a \cdot b \in IN_0$
Ley Asociativa	
$a,b,c \in IN_0 \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$	$a,b,c \in IN_0 \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Ley conmutativa	
$a,b \in IN_0 \Rightarrow a+b = b+a$	$a,b \in IN_0 \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$
Elemento Neutro	
$\exists! 0 \in IN_0 / (\forall a \in IN \Rightarrow a+0 = 0+a = a)$	$\exists! 1 \in IN / (\forall a \in IN \Rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$
Distributividad de (•) con respecto a (+)	
$a,b,c \in IN \Rightarrow [a \cdot (b+c)] = a \cdot b + a \cdot c$	

Dados *a* y *b* en los naturales, nos preguntamos si existe algún x $\in$ IN, tal que se verifique: x + b = a

Si a y b se dan o fijan en forma arbitraria, la ecuación no siempre admite solución en los naturales.

Sea por ejemplo la ecuación:

x + 2 = 1 que no tiene solución en los naturales.

En efecto si fuera $x_0 \in$ IN que satisface, sería: $x_0 + 2 = 1$

$x_0 + 2 > 2 \Rightarrow 1 > 2$ que es contradictorio

Con lo que hemos verificado que la ecuación x + 2 = 1 no admite solución en los naturales.

<u>Conclusión:</u> las ecuaciones de las forma x + b = a, siendo *a* y *b* naturales prefijados, tienen solución (que además es única) en los naturales en todos los casos excepto cuando b$\geq a$.

O sea, ecuaciones del tipo x + b = a en que *a* y *b* son naturales, admiten solución única natural si se elige b < a.

Llamaremos diferencia de a y b, que se escribe a – b, a la solución natural de la ecuación x + b = a, supuesto que b < a.

III.1.4. Aplicación en los Números Naturales: Principio de Inducción Completa

III.1.4.1. Sumatoria

Concepto: La sumatoria permite representar la suma de una sucesión de términos en una forma muy breve. Por ejemplo, la suma de n términos tales como $u_1 + u_2 + ... + u_n$ puede representarse con la notación:

$\sum_{i=1}^{n} u_i$, en donde el símbolo $\sum$ es el signo de suma y la letra i, llamada índice de suma, toma sucesivamente todos los valores enteros positivos de 1 a n inclusive.

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

Propiedades de la sumatoria:

i) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

ii) $\sum_{i=1}^{n} (ab_i) = a\sum_{i=1}^{n} b_i$ donde *a* es una constante.

iii) $\sum_{i=1}^{n} a = a + a + ... + a = na$

III.1.4.2. Teorema de Inducción Completa

Concepto: el principio de inducción completa proporciona un método de demostración por recurrencia.

No es constructivo en el sentido de generar propiedades, pero hace posible la demostración de éstas cuando son relativas al conjunto de los números naturales.

Sea P propiedad relativa al conjunto de los números naturales, la verdad de P queda asegurada para todo $n \in IN$, si se verifican:

i) P(1) es V
ii) Si p(h) es V, entonces P(h+1) es V

Si S es un subconjunto de IN que satisface:

i) $1 \in S$
ii) $h \in S \Rightarrow h + 1 \in S$

Entonces S = IN

"Todo subconjunto de IN que incluya al 1 y al siguiente de h siempre que incluya a h, es igual a IN".

$$(S \subset IN,\ 1 \in S \wedge h \in S \Rightarrow h + 1 \in S) \Rightarrow S = IN$$

Para demostrar este teorema es suficiente probar que $IN \subset S$ y para esto basta probar que el subconjunto $S' = \{x \in IN / x \notin S\} = \varnothing$.

Para ello supongamos que $S' \neq \varnothing$.

Como $S' \subset IN$ / $S' \neq \varnothing$ de acuerdo con el principio de buena ordenación (PBO: "todo subconjunto no vacío de IN tiene primer elemento")existe el elemento mínimo $m \in S'$ (1).

Por hipótesis, $1 \in S$ y como los elementos de S´ no pertenecen a S, es $m \neq 1$.

Por otra parte, siendo $m \in IN \wedge m \neq 1$, se tiene $m > 1 \Rightarrow m-1 > 0$.

Como $m-1 < m$, por ser m el mínimo de S´, resulta que $m-1 \in S$.

Ahora bien, de acuerdo con la hipótesis ii)

$$m-1 \in S \Rightarrow (m-1) + 1 \in S \Rightarrow m \in S$$

Este resultado: $m \in S$ es contradictorio con (1). Luego $IN \subset S$, y como por hipótesis $S \subset IN$, resulta que $S = IN$.

Principio de Inducción Completa

Hipótesis)

$P(1)$ es V

$\forall h: P(h) \Rightarrow P(h+1)$

Tesis)

$\forall n : P(n)$ es V

Observación:

La demostración de una propiedad relativa a IN por inducción completa, se realiza probando la verdad de las dos proposiciones de la hipótesis del Teorema de Inducción Completa.

Ej.: Probar por inducción completa que la suma de los n primeros números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$

Es decir $\forall n \in IN$ se verifica:

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

I) Debemos probar que la propiedad se verifica para n =1.

Entonces queda:

$$S_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

II) Demostramos la verdad de la implicación de la hipótesis

Hipótesis)

$$S_h = 1 + 2 + \ldots + h = \frac{h\,.\,(h+1)}{2}$$

Tesis)

$$S_{(h+1)} = 1 + 2 + \ldots + h + (h+1) = \frac{(h+1).(h+2)}{2}$$

Demostración)

$$S_{(h+1)} = 1 + 2 + \ldots + h + (h+1) = \frac{h.(h+1)}{2} + (h+1)$$

Operando queda;

$$S_{(h+1)} = \frac{h.(h+1) + 2.(h+1)}{2} = \frac{(h+1).(h+2)}{2}$$

$$S_{(h+1)} = \frac{h^2 + 3h + 2}{2} = \frac{h^2 + 3h + 2}{2}$$

Resulta entonces la fórmula válida para todo n que pertenece al conjunto de los números naturales IN.

III. - Conjuntos Numéricos

Dios creó los números naturales el resto lo hizo el hombre.
Leopold Kronecker, (1823-1891)

III.2. Los Números Enteros

Para resolver la ecuación anteriormente planteada (x + b = a), es necesario considerar o definir otro conjunto: los números enteros y lo designamos con Z.
Los números enteros se encuentran formados por la unión de los números naturales, los enteros negativos y el cero, esto es:

$$Z = \{....,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$Z = IN \cup \{0\} \cup Z^{-}$$

En este caso se hace una analogía de los naturales con los enteros positivos designados como Z^{+}. Los enteros negativos designados como Z^{-}, son los números opuestos a los enteros positivos.

III.2.1.-Caracterización del conjunto de los Números Enteros

Es un conjunto infinito
Cada entero tiene un único antecesor y un único sucesor
Es discreto

III.2.2.- Orden en los números Enteros

Sean *a* y *b* pertenecientes a los enteros, se tiene:

$$a < b \Leftrightarrow \exists k \in IN / a + k = b$$

Sea por ejemplo:

A = 10 b=16 $\exists$ k = 6 / 10 + 6 = 16 Luego a < b (10 < 1 6)

III.2.3.- Las operaciones adición y producto en el conjunto de los números Enteros

En los enteros están definidas dos operaciones denotadas por **(+)** y **(•)** y denominadas *suma y producto* de enteros.

$+ : Z \times Z \to Z$ $\quad (a, b) \to a + b$

$\bullet : Z \times Z \to Z$ $\quad (a, b) \to a \bullet b$

Propiedades de las operaciones.

+	•
Ley de Cierre	
$a,b \in Z \Rightarrow a+b \in Z$	$a,b \in Z \Rightarrow a \cdot b \in Z$
Ley Asociativa	
$a,b,c \in Z \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$	$a,b,c \in Z \Rightarrow (a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Ley conmutativa	
$a,b \in Z \Rightarrow a+b = b+a$	$a,b \in Z \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$
Elemento Neutro	
$\exists! 0 \in Z / (\forall a \in Z \Rightarrow a+0 = 0+a = a)$	$\exists! 1 \in Z / (\forall a \in Z \Rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$
Elemento Opuesto	
$a \in Z \Rightarrow (\exists! a' \in Z / a + a' = 0 \therefore -a = a')$	
Distributividad de (•) con respecto a (+)	
$a,b,c \in Z \Rightarrow [a \cdot (b+c)] = a \cdot b + a \cdot c$	

En los números enteros se plantean ecuaciones como la siguiente:

$$a \cdot x = b \Rightarrow x = b : a$$

La división *b:a* solo es posible si *b* es múltiplo de *a* y $a \neq 0$; sólo en esas condiciones la ecuación tiene solución en Z. Por ejemplo: $x \cdot 3 = 17 \Rightarrow x = 17 : 3$, no tiene solución en Z.

III.3. Los Números Racionales

La ecuación antes planteada ($a \cdot x = b \Rightarrow x = b : a$), no tiene solución en los números enteros, surge entonces la necesidad de considerar nuevos números que den solución a planteos del tipo mencionado. Se crean así los números racionales de la forma $\frac{a}{b}$ donde $b \neq 0$ y a y b son números enteros, designándose al conjunto como Q.

$$Q = \{(a,b) / a \in Z \wedge b \in IN\}$$

III.3.1.- Caracterización del conjunto de los Números Racionales

- No tiene primer ni último elemento
- Es un conjunto totalmente ordenado
- Entre dos números racionales existen infinitos números racionales, esto quiere decir que Q es un conjunto denso.

$$\text{Si } \frac{a}{b} \langle \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \langle \frac{a+c}{b+d} \langle \frac{c}{d}$$

III.3.2.- Relación de orden en los Racionales

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos números racionales:

1. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d < b.c$ Orden Estricto en Q
2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$ Igualdad en Q
3. $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d \leq b.c$ Orden Amplio en Q

III.3.3.- Las operaciones de adición y producto en el conjunto de los Números Racionales

En los racionales están definidas dos operaciones denotadas por **(+)** y **(•)** y denominadas *suma y producto* de naturales.

+: Q x Q → Q

$$\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)\to\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\overset{def}{=}\frac{ad+bc}{bd}$$

•: Q x Q → Q

$$\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)\to\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\overset{def}{=}\frac{a.c}{b.d}$$

Donde por cuestiones prácticas se empleará como: $r_1 = \frac{a}{b}$; $r_2 = \frac{c}{d}$

Propiedades de las operaciones

+	•
Ley de Cierre	
$r_1, r_2 \in Q \Rightarrow r_1 + r_2 \in Q$	$r_1, r_2 \in Q \Rightarrow r_1 \cdot r_2 \in Q$
Ley Asociativa	
$r_1, r_2, r_3 \in Q \Rightarrow (r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3)$	$r_1, r_2, r_3 \in Q \Rightarrow (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)$
Ley Conmutativa	
$r_1, r_2 \in Q \Rightarrow r_1 + r_2 = r_2 + r_1$	$r_1, r_2 \in Q \Rightarrow r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1$
Elemento Neutro	
$\exists! 0 \in Q / (\forall r \in Q \Rightarrow r + 0 = 0 + r = r)$	$\exists! 1 \in Q / (\forall r \in Q \Rightarrow r \cdot 1 = 1 \cdot r = r)$
Elemento Inverso	
$\forall r \in Q \exists - r \in Q / r + (-r) = o$	$\forall r \neq 0 \in Q \exists r^{-1} \in Q / r = \frac{a}{b} \Rightarrow r^{-1} = \frac{b}{a} \wedge \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$
Distributividad de (•) con respecto a (+)	
$r_1, r_2, r_3 \in Q \Rightarrow [r_1 \cdot (r_2 + r_3)] = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3$	

III.4. Los Números Irracionales

En los racionales se pueden realizar las operaciones de suma y producto, también la potenciación, pero la radicación ¿será siempre posible?. Nos preguntamos entonces si: ¿existe algún $x \in Q / x^2 = 2$?

Si $x \in Q \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$; donde $a \in Z$ y $b \in IN$

Es posible demostrar que este número x no es racional y pertenece a un nuevo conjunto numérico distinto de Q, al cual pertenece $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, π, e, etc. Se dice entonces que Q no es un cuerpo completo y que el nuevo conjunto al que pertenece x es el de los números irracionales y se designa como II.

III.5. El conjunto de los Números Reales

III.5.1.- Caracterización del conjunto de los Números Reales

Efectuando la unión de los conjuntos de números racionales y de irracionales se obtiene un nuevo conjunto que se designa con IR y se denomina conjunto de los números reales, el cual desempeñan un papel importantísimo en toda la Matemática.

$$IR = Q \cup II$$

III.5.2.- Las operaciones de adición y producto en el conjunto de los Números Reales. El cuerpo de los Números Reales

Hay dos operaciones básicas con los números reales, llamados *suma* y *producto* que se simbolizan con (**+**) y (•).

$$+: IR \times IR \to IR \qquad (a, b) \to a + b$$

$$\bullet: IR \times IR \to IR \qquad (a, b) \to a \bullet b$$

Propiedades del cuerpo de los reales, (IR, +, •).

+	•
Ley de Cierre	
$a , b \in IR \Rightarrow a + b \in IR$	$a , b \in IR \Rightarrow a \bullet b \in IR$
Ley Asociativa	
$a , b, c \in IR \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$	$a , b, c\in IR\Rightarrow (a\bullet b) \bullet c = a \bullet (b\bullet c)$
Ley Conmutativa	
$a , b \in IR \Rightarrow a + b = b + a$	$a , b \in IR \Rightarrow a \bullet b = b \bullet a$
Elemento Neutro	
$\exists! 0 \in IR / (\forall a \in IR \Rightarrow a + 0 = a)$	$\exists! 1 \in IR / (\forall a \in IR \Rightarrow a.1 = a)$
Elemento Inverso	
$a \in IR \Rightarrow \left(\exists! a^{`} \in IR / a + a^{`} = 0\right) \therefore -a = a^{`}$	$a \in IR - \{0\} \Rightarrow \left(\exists! a^{''} \in IR / a \cdot a^{''} = 1\right) \therefore \frac{1}{a} = a^{''}$
Distributividad de (•) con respecto a (+)	
$a , b, c\in IR\Rightarrow a\bullet(b+ c) = a\bullet b +a\bullet c$	

De estas propiedades fundamentales del cuerpo IR se deducen las siguientes:

a) $\forall z \in IR \Rightarrow z.0 = 0$

b) $\forall a,b \in IR \Rightarrow \exists! x \in IR / z.b = a$. De esta propiedad surge la definición de diferencia entre IR, esto es: $a - b = x \Leftrightarrow x + b = a$

c) $\forall a,b \in IR \wedge b \neq 0 \Rightarrow \exists! z \in IR / z.a = a$. De esta propiedad surge la definición de cociente con la restricción $b \neq 0$, esto es: $\frac{a}{b} = z \Leftrightarrow z.b = a$

Con la relación de orden se tiene una estructura de cuerpo ordenado de los números reales IR, (IR, +, •), comenzamos aceptando que existe un subconjunto no vacio IR^{+} de IR, cuyos elementos se llaman números positivos, tal que:

1) $\forall a,b \in IR^{+} \Rightarrow \left(a + b \in IR^{+} \wedge a.b \in IR^{+}\right)$

2) $0 \notin IR^{+}$

3) $x \in IR - \{0\} \Rightarrow \left(- x \in IR^{+} \underline{\vee} x \in IR^{+}\right)$

Diremos que la terna (IR, +, •) es un cuerpo ordenado y a IR^+ le llamaremos clase positiva del conjunto de números reales IR.

Si (IR, +, •) es un cuerpo ordenado, definiremos en IR dos relaciones, la relación de mayor y la denotamos con › y la relación de mayor o igual que se denota como ≥.

Si $a,b \in IR$ pondremos:

- $a > b \overset{def}{\Leftrightarrow} a - b \in IR^+$
- $a \geq b \overset{def}{\Leftrightarrow} a > b \vee a = b$

III.5.3.- Intervalos

Sean a y b dos números tales que a, b ∈ IR ∧ a <b. entonces:

- Intervalo abierto (a,b): Es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b pero que no los incluye.

  $$(a,b)=\{x/x \in IR \wedge a < x < b\}$$

- Intervalo cerrado [a,b]: Es el conjunto de puntos de la recta real formado por a, b y todos los comprendidos entre ambos.

  $$[a,b]=\{x/x\in IR \wedge a \leq x \leq b\}$$

- Intervalo semiabierto o semicerrado

  * Semiabierto a izquierda o semicerrado a derecha:

  $$(a,b]=\{x/x\in IR \wedge a < x \leq b\}$$

  * Semiabierto a derecha o semicerrado a izquierda:

  $$[a,b)=\{x/x\in IR \wedge a \leq x < b\}$$

También se pueden definir los intervalos infinitos:

- $[a,+\infty)=\{x/x \in IR \wedge x \geq a\}$
- $(a, ,+\infty)=\{x/x \in IR \wedge x > a\}$
- $(-\infty,a]=\{x/x \in IR \wedge x \leq a\}$
- $(-\infty,a)=\{x/x \in IR \wedge x < a\}$
- $(-\infty,+\infty)=\{x/x \in IR\} = IR$

III. - Conjuntos Numéricos

Mientras el álgebra y la geometría tomaron caminos distintos, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Pero cuando las dos ciencias se complementaron, se contagiaron una a la otra de vitalidad y de ahí en adelante marcharon con ritmo rápido hacia la perfección.

Joseph Louis Lagrange
(1736-1813)

III.6.- Conjuntos Ordenados

Se observa que {p, q} representan un conjunto cuyos elementos se denominan p y q. Además {p, q}= {q, p} lo cual nos dice que el orden en que se consideren los elementos carece de importancia. En muchos casos interesa el orden de los elementos del conjunto.

Definición: "Un conjunto ordenado se indica poniendo entre paréntesis los símbolos de sus elementos, los cuales se anotan en su orden".
Según el número de componentes de un conjunto ordenado podemos tener: pares, ternas, cuaternas ordenadas, etc.

$$A^n = \{(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) / \forall_i = 1,2,...,n; a_i \in A\}$$

$n \in IN$ fijo, el símbolo A^n representa el conjunto de todos las n-uplas ordenadas de elementos.

Sean A y B conjuntos cualesquiera y en particular se tiene que:
$s \in A$ y $t \in B$, definimos par ordenado de primera componente *s* y segunda componente *t* al símbolo *(s, t)*

$(s,t) = (s', t') \overset{def}{\Leftrightarrow} (s = s' \wedge t = t')$

$A \times B \overset{def}{=} \{(s,t)/(s \in A \wedge t \in B)\}$

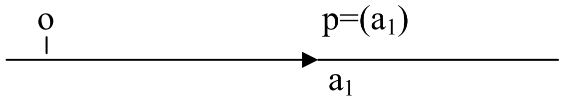
$A = B$ resulta $A \times A \overset{def}{=} A^2$, conjunto de todos los pares ordenados de elementos de A, análogamente $A^3 = \{(x,y,z)/(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A)\}$ ternas, A^4 cuaternas, A^5 quintuplas ordenadas y así sucesivamente.

III.6.1.- El conjunto de las n-uplas ordenadas de numeros reales

Si consideramos $A = IR$ se obtiene:

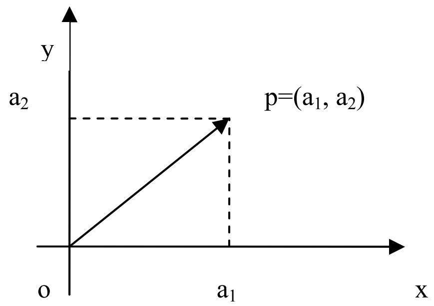
a) $IR^1 = \{(a_1) / a_1 \in IR\}$ que se identifica con la recta real

Geométricamente: $\forall\ a_1 \in IR\ \exists\ p = (a_1)$ que se identifica con el vector $\vec{op}$



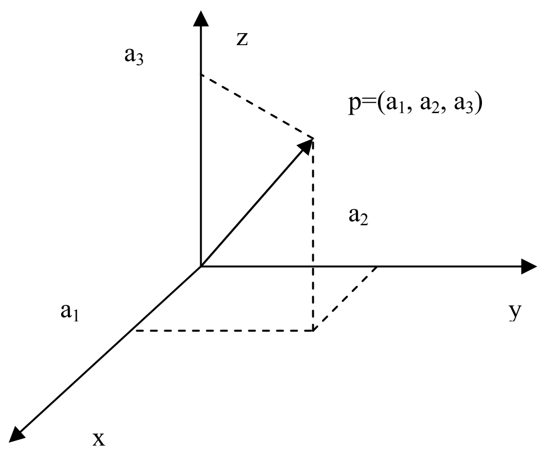
b) $IR^2 = \{(a_1, a_2) / a_1 \in IR, a_2 \in IR\}$ que se identifica con el plano.

Geométricamente: $\forall\ (a_1, a_2) \in IR^2, \exists\ p = (a_1, a_2)$ que se identifica con el vector $\vec{op}$ en el plano



c) $IR^3 = \{(a_1, a_2, a_3) / a_1 \in IR, a_2 \in IR, a_3 \in IR\}$ que se identifica con el espacio.

Geométricamente: $\forall\ (a_1, a_2, a_3) \in IR^3\ \exists\ p = (a_1, a_2, a_3)$ que se identifica con el vector $\vec{op}$ en el espacio



Análogamente se presenta el conjunto de las n-uplas ordenadas de números reales

$IR^n = \{(a_1, a_2, a_3,..., a_n) / a_1 \in IR, a_2 \in IR, a_3 \in IR,..., a_n \in IR\}$

III.6.2.- Operaciones en IR^n

Suma de n-uplas

$+ : IR^n x IR^n \to IR^n$

$(A, B) \to A + B$

Esto es $A = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) \in IR^n$

$B = (b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_n) \in IR^n$

$$A + B \overset{def}{=} (a_1, a_2, ..., a_i ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_n) \overset{def}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_i + b_i, ..., a_n + b_n)$$

2) Producto de un escalar por una n-uplas

$\bullet : IRxIR^n \to IR^n$

$(r, A) \to rA$

Esto es: $r \in IR$ y $A = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) \in IR^n$

$$r.A = r(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) \overset{def}{=} (ra_1, ..., ra_i, ..., ra_n)$$

La suma y el producto definidos verifican las siguientes condiciones:

+ es una ley de cierre , o ley interna

a) $A + (B + C) = (A + B) + C; \forall A, B, C \in IR^n$

b) $\exists 0_n \in IR^n / \forall A \in IR^n : A + 0_n = 0_n + A = A$ / $0_n=(0,0,...,0)$

c) $\forall A \in IR^n \exists - A \in IR^n : A + (- A) = (- A) + A = 0_n$ / $-A=(-a_1,-a_2,...,-a_n)$

d) $A + B = B + A; \forall A, B \in IR^n$

e) $r.A \in IR^n ; \forall r \in IR, \forall A \in IR^n$

f) $(r+s).A = r.A + s.A, \forall r, s \in IR, \forall A \in IR^n$

g) $(r.s).A = r.(s.A), \forall r, s \in IR, \forall A \in IR^n$

h) $r.(A+B) = r.A + r.B, \forall r \in IR, \forall A, B \in IR^n$

i) $1.A = A, \forall A \in IR^n$

De lo anterior se deduce que la cuaterna (IR^n ,+,IR, •) tiene estructura de espacio vectorial ; los elementos de IR^n son vectores y los elementos de IR son números reales.

.

El paso final se dio hacia el siglo XVIII cuando se agregaron los imaginarios al sistema completado de los números reales y se creó el dominio de los números complejos. ("El sistema de números- De los naturales a los complejos". Elsa Rodriguez Areul de Torino. Memorias de la I Jornada Regional de la Historia de la Matemática. Año 2003).

Sin embargo, la existencia de números complejos no fue completamente aceptada hasta la interpretación geométrica descrita por Wessel en 1799, redescubierta algunos años después y popularizada por Gauss.

IV.- El conjunto de los Números Complejos

El conjunto IN se "amplia" con nuevos números hasta llegar a IR.

- La ecuación: $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en IR.

La ampliación de IR son los nuevos números que vamos a considerar, para ello tomemos como conjunto de partida el conjunto IR^2.

Recordemos: (IR^2, +, IR, .) espacio vectorial con las operaciones:

$$+ : IR^2 x IR^2 \to IR^2 \qquad \bullet : IR\ x IR^2 \to IR^2$$

$$(A, B) \to A + B \qquad (\alpha, A) \to \alpha A$$

Trataremos ahora de dar a IR^2 estructura de cuerpo, para ello ya tenemos definido la suma de puntos y ahora nos queda por definir el producto de puntos, esto es:

$$\bullet : IR^2 x IR^2 \to IR^2$$

$$(A, B) \to AB = (a_1, a_2)(b_1, b_2) \overset{def}{=} (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Teorema: IR^2 con las operaciones *suma de pares ordenados y producto de pares ordenados es un cuerpo.*

Demostración: Sean A = (a_1, a_2), B $= (b_1, b_2)$, C $= (c_1, c_2)$ elementos arbitrarios de IR^2. Designemos como es habitual: 0 = $(0,0)$ y $U_1 = (1,0)$.

Pongamos: $\quad -A = (-a_1, -a_2)$

y además si A ≠ 0: $A^{-1} = \left(\dfrac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \dfrac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right)$

Con estos convenios se tiene:

+	•
Ley de Cierre	
A, B $\in IR^2 \Rightarrow A + B \in IR^2$	A, B $\in IR^2 \Rightarrow A. \bullet B \in IR^2$
Ley Asociativa	
A, B, $C \in IR^2 \Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$	A, B,$C\in IR^2 \Rightarrow (A\bullet B) \bullet C = A \bullet (B\bullet C)$
Ley Conmutativa	
A, B $\in IR^2 \Rightarrow$ A + $B = B + A$	A, B $\in IR^2 \Rightarrow$ A $\bullet B = B \bullet A$
Elemento Neutro	
$\exists! 0 \in IR^2 / (\forall A \in IR^2 \Rightarrow A + 0 = A)$	$\exists! U_1 \in IR^2 / (\forall A \in IR^2 \Rightarrow A.U_1 = A)$
Elemento Opuesto	**Elemento Inverso multiplicativo**
$A \in IR^2 \Rightarrow (\exists! A' \in IR^2 / A + A' = 0) \therefore -\mathbf{A} = \mathbf{A}'$	$\mathbf{A} \in \mathbf{IR}^2 - \{\mathbf{0}\} \Rightarrow (\exists! \mathbf{A}'' \in \mathbf{IR}^2 / \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'' = \mathbf{U}_1)$ $\therefore \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}} = \mathbf{A}''$
Distributividad de (•) con respecto a (+)	
A, B, $C\in IR^2 \Rightarrow A\bullet(B+C) = A\bullet B + A\bullet C$	

Luego (IR^2, +, .) es cuerpo.

Ahora podemos definir:

$$A - B \overset{def}{=} A + (-B)$$

Y, si B ≠ 0: $\frac{A}{B} \overset{def}{=} A.B^{-1} = (a_1, a_2).\left(\frac{b_1}{b_1^2 + b_2^2}, \frac{-b_2}{b_1^2 + b_2^2}\right) = \left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2}, \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 + b_2^2}\right)$

Cuando se considera IR^2 como cuerpo, sus elementos: A = (a_1, a_2), B =$(b_1, b_2)\ldots$ etc. se denominan números complejos.

$$C \overset{def}{=} IR^2$$

Es posible poner en correspondencia los puntos del eje de abscisas $\overline{C} \underset{\neq}{\subset} C$ con los puntos de la recta IR de tal modo que:

_Suma de puntos de $\overline{C}$ correspondan con sumas de puntos de IR y

_Productos de puntos de $\overline{C}$ correspondan con productos de puntos de IR.

$\overline{C} \overset{def}{=} \{(x_1, x_2) \in C / x_2 = 0\}$, es evidente que $\overline{C} \overset{\subset}{\neq} C$

Observamos que: a, b $\in$ IR $\Rightarrow \begin{cases} (a,0)+(b,0)=(a+b,0) \\ (a,0).(b,0)=(a.b,0) \end{cases}$

Podemos establecer la correspondencia siguiente:

A cada par $(x,0) \in C$ le asignamos un número $x \in IR$, entonces, para cada x pondremos:

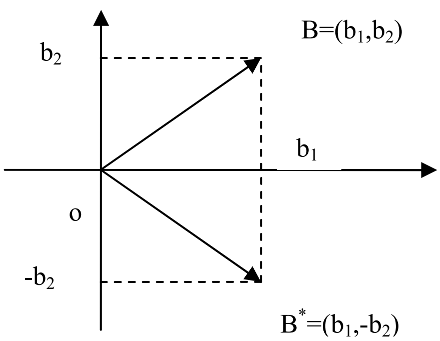
$$\underbrace{(x,0)}_{puntodeIR^2} = \underbrace{x}_{puntodeIR}$$

(La igualdad anterior no es rigurosa, pues se identifica un par con su primera componente).

Siendo $\overline{C} \overset{\subset}{\neq} C$ y habiendo identificado $\overline{C}$ con IR, podemos considerar al cuerpo de los complejos C como una "ampliación" del conjunto de los números reales IR.

IV.1.- Definiciones. Igualdad. Números complejos conjugados

Sea B $=(b_1, b_2) \in C$, el número $B^* \overset{def}{=} (b_1, -b_2)$ recibe el nombre de ***Conjugado de B***.



Se verifican las siguientes propiedades:

- $B + B^* = (2b_1, 0)$

- B . B* = $(b_1^2 + b_2^2, 0)$

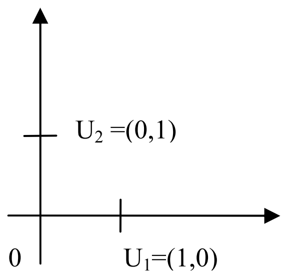
Y como identificamos $\overline{C}$ con IR:

- B + B* = 2b$_1$ $\in$ IR
- B . B* = $b_1^2 + b_2^2 = \|B\|^2 \in IR$, donde ||B|| se denomina módulo de B

IV.2.- La Unidad Imaginaria

El número complejo U_2 = (0,1) se denota tradicionalmente con *i* y se lo denomina "unidad imaginaria". Esto es:

$$\mathrm{i} \overset{def}{=} U_2 = (0,1)$$



IV.2.1.- Propiedades

- $i^2 = -1$, esto es: $i^2 = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$

Por lo tanto: $i^2 + 1 = 0$

- De modo que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ admite soluciones en *C* una de las cuales es *i* (puesto que para x = i resulta $i^2 + 1 = 0 \Rightarrow (-1) + 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
- Un número complejo es real si y sólo si es igual a su conjugado.

Esto es:

$$Z \in \overline{C} \Leftrightarrow Z = Z^*$$

Prueba:

i) $Z \in \overline{C} \Rightarrow Z = Z^*$

$Z \in \overline{C} \Rightarrow Z = (a,0) \wedge Z^* = (a,0) \Rightarrow Z = a \wedge Z^* = a \Rightarrow Z = Z^*$

ii) $Z = Z^* \Rightarrow Z \in Z^*$

$Z = Z^* \Rightarrow$

$\mathbf{(a,b) = (a,-b) \Rightarrow a + ib = a - ib \Rightarrow ib = -ib \Rightarrow 2ib = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow Z = a \Rightarrow Z \in \overline{C} \Rightarrow Z \in IR}$

IV.3.- Formas Binómicas

Sea A = $(a_1, a_2) \in IR$, podemos verificar que A = $(a_1, 0) + (0, a_2)$, pero:

$(a_1, 0) = a_1$

Y es sencillo probar que:

$(0, a_2) = (a_2, 0).i = (a_2, 0).(0,1) = (0, a_2) = a_2 i$

En consecuencia: $\boxed{A = a_1 + a_2 i}$, que es la forma binómica de A.

Además
$$\left\{\begin{array}{l} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ \quad\downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad\quad \downarrow \\ (a_1 + a_2 i) + (b_1 + b_2 i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) i \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (a_1, a_2).(b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ \quad\downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \\ (a_1 + a_2 i).(b_1 + b_2 i) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{array}\right.$$

(La diferencia entre operar en forma cartesiana con la binómica está en sustituir $i^2 = -1$).

Finalmente si B $\neq$ 0 y recordando que

$$B^{-1} = \left(\frac{b_1}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{-b_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) \text{ o sea}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2}.(b_1, -b_2) = \frac{1}{\|B\|^2}.B^*$$

Se tiene $\frac{A}{B} = A.B^{-1} = \frac{1}{\|B\|^2}(A.B^*)$

O sea $\frac{A}{B} = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2}(a_1 + a_2 i).(b_1 - b_2 i)$

IV.4.- Módulo de un número complejo

Podemos a partir de aquí identificar $\|A\|$ con módulo del número complejo A. esto es $|A| = \|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ con $A = (a, b)$ elemento de *C*.

IV.4.1.- Propiedades

Sea $A = (a, b) \in C \Rightarrow |A| \geq a \wedge \operatorname{Im}(A) \leq |A|$

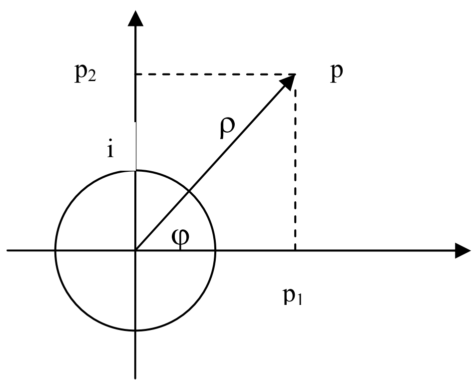
1) $A.A^* = |A|^2$
2) $|A.B| = |A|.|B|$ con A y B $\in C$
3) $|A + B| \leq |A| + |B|$
4) $|A^n| = |\underbrace{A.A...A}_{n}| = \underbrace{|A|...|A|}_{n} = |A|^n$

IV.5.- Forma polar de un número complejo

Sea $P = (p_1, p_2) = p_1 + p_2 \in C$

Sabemos que permite una infinidad de formas polares (ρ / φ) para las cuales se verifican:

$$\begin{cases} p_1 = \rho \cos \varphi \\ p_2 = \rho sen \varphi \end{cases}$$



Por lo tanto:

$P = (p_1, p_2) = p_1 + ip_2 = \rho \cos \varphi + i\rho sen \varphi = \rho(\cos \varphi + isen \varphi)$

Podemos escribir:

$$P = \underbrace{(p_1, p_2)}_{formacartesiana} = \underbrace{(\rho / \varphi)}_{unaformapolar} = \underbrace{p_1 + ip_2}_{formabinómica} = \underbrace{\rho(\cos \varphi + isen \varphi)}_{unaformatrigonométrica}$$

IV.5.1.- Operaciones con números complejos en forma polar

Sean (r/α) y (s/β) formas polares de dos números complejos P y Q no nulos.

$P=(p_1,p_2)=(r/\alpha)=r(\cos\alpha+isen\alpha)$

$Q=(q_1,q_2)=(s/\beta)=s(\cos\beta+isen\beta)$

(Siendo P y Q no nulos, se tiene $|P|=\|P\|=r\neq 0$ y además $|Q|=\|Q\|=s\neq 0$)

- Producto

P.Q = $(r/\alpha).(s/\beta)=[r(\cos\alpha+isen\alpha)].[s(\cos\beta+isen\beta)]=$

$$=rs[\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)}+i\underbrace{(sen\alpha\cos\beta+sen\beta\cos\alpha)}_{sen(\alpha+\beta)}]$$

O sea:

$$\boxed{P.Q=(r/\alpha).(s/\beta)=(r.s/\alpha+\beta)}$$

- Potenciación

En particular:

$P^2=P.P=(r/\alpha).(r/\alpha)=(r^2/2\alpha)$

$P^3=P^2.P=(r^2/2\alpha).(r/\alpha)=(r^3/3\alpha)$

Puede demostrarse que si n $\in$ IN:

$$\boxed{P^n=(r/\alpha)^n=(r^n/n\alpha)\ \text{Fórmula de De Moivre}}$$

Como Q $\neq$ 0, $|Q|=s\neq 0$, podemos expresar Q^{-1}:

$$Q^{-1}=\frac{1}{\|Q\|^2}.Q^*=\frac{Q^*}{\|Q\|^2}=\frac{s(\cos\beta-isen\beta)}{s^2}=\frac{1}{s}[\cos(-\beta)+isen(-\beta)]$$

Es decir: $Q^{-1}=(s/\beta)^{-1}=\left(\frac{1}{s}/-\beta\right)$

- División

$$\frac{P}{Q}=P.Q^{-1}=(r/\alpha)(s/\beta)^{-1}=(r/\alpha)\left(\frac{1}{s}/-\beta\right)=\left(\frac{r}{s}/\alpha-\beta\right)$$

O sea:

$$\boxed{\frac{P}{Q}=\frac{(r/\alpha)}{(s/\beta)}=\left(\frac{r}{s}/\alpha-\beta\right)}$$

- Raíz enésima

Si n$\in$ IN y A $\in C$

$\sqrt[n]{A} = W \overset{def}{\Leftrightarrow} W^n = A$

Si $A = (r/\varphi)$ y $W = (\rho/\theta)$, resulta:

$(\rho/\theta)^n = (r/\varphi) \Rightarrow (\rho^n / n\theta) = (r/\varphi)$ y de la condición de igualdad de complejos en forma polar se deduce:

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + 2k\pi, k \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in Z \end{cases}$$

Luego $\sqrt[n]{A} = \left(\sqrt[n]{r} / \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,\ldots,n-1$

Esto es, hay sólo n valores W_k distintos, y $\sqrt[n]{r}$ es la única raíz enésima positiva de r > 0.

Dados n $\in$ IN y un número complejo (r/α) podemos considerar la ecuación:

$$x^n = (r/\alpha) \Rightarrow x^n - (r/\alpha) = 0$$

Un importante teorema asegura que toda ecuación algebraica de grado n con coeficientes complejos (eventualmente reales) admite precisamente n raíces complejas (algunas de las cuales pueden ser reales y no necesariamente las n raíces son distintas).

Aplicando este teorema a la ecuación $x^n = (r/\alpha)$, podemos asegurar que existen n números complejos que la satisfacen. Diremos que éstos n números complejos, soluciones o raíces de la ecuación $x^n = (r/\alpha)$, son las raíces enésimas de (r/α).

GUÍA PRÁCTICA

I.- Elementos de Logica simbolica

I.1) Dadas las siguientes proposiciones:

1.1 Todo triángulo equilátero es un triángulo.

1.2 Todos los alumnos cumplen con sus obligaciones.

1.3 No llueve y hace frío.

1.4 Se prohíbe a los pasajeros asomarse o sacar los brazos por la ventanilla.

1.5 Mi secretaria o yo personalmente iremos a retirar el mensaje.

1.6 Si algún estadista es amante de la justicia, algún amante de la justicia es estadista.

1.7 Si la madera fuera un metal, entonces sería maleable.

1.8 Solo si es empleado de la casa puede utilizar el ascensor principal.

1.9 El hecho de que 2 sea un número positivo, implica que -2 es un nº negativo.

1.10 Si un número es divisible por 2 y por 6, entonces es divisible por 12.

a- Identifique las proposiciones simples y compuestas.

b- Traduzca cada una de ellas al lenguaje lógico.

c- Determine el valor de verdad de las proposiciones simples

d- Determine el valor de las proposiciones compuestas.

e- A partir de las proposiciones simples, formule proposiciones compuestas haciendo uso de conectores lógicos.

I.2) Encuentre en el siguiente texto las proposiciones y las constantes lógicas:

Las invasiones biológicas están alterando las comunidades naturales del mundo. Si no se implementan estrategias eficaces para disminuir los impactos más perjudiciales de los invasores, nos arriesgamos a empobrecer y homogeneizar los ecosistemas de los cuales dependemos. De continuar la falta de políticas efectivas para prevenirlas o controlarlas, las invasiones biológicas serán comparables a los cambios atmosféricos y al cambio en el uso de la tierra como los grandes factores antrópicos de cambio global.

I.3) Teniendo en cuenta las siguientes proposiciones simples:

p: saldré a pasear. r: escribiré mi libro.

s: trabajaré en el jardín. q: me quedaré a pintar.

Exprese en lenguaje común las siguientes proposiciones compuestas:

a: $\sim p$ b: $\sim(p \Rightarrow q)$

c: $p \vee q$ d: $\sim s$

e: $\sim p \wedge q$ f: $\sim r \wedge \sim q$

I.4) Dadas las siguientes proposiciones:

p: $-5 < -6$ q: $0 > -5$

r: (-5) es un número positivo.

3.1 Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, y r .

a: $p \vee q$ b: $\sim (p \vee \sim r)$ c: $\sim (p \wedge r)$

d: $q \vee r$ e: $(p \vee q) \wedge \sim r$ f: $\sim p \Rightarrow r$

I.5) Confeccione la tabla de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

a: $(p \wedge q) \Rightarrow r$ b: $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

I.6) Determine los valores de verdad de q, para que las siguientes proposiciones sean verdaderas, sabiendo que p y r son verdaderas y s es falsa.

a: $(p \wedge r) \Rightarrow (q \vee s)$ b: $(p \vee s) \Rightarrow q$

c: $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ d: $(p \Rightarrow q) \wedge \sim s$

e: $(q \Rightarrow s) \vee (r \Rightarrow s)$

I.7) Sean p y q proposiciones verdaderas y r y s falsas, indique el valor de verdad de los bicondicionales siguientes:

a: $(p \vee q) \Leftrightarrow r$ b: $p \Leftrightarrow (\sim p \vee r)$

c: $(q \Leftrightarrow \sim r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ d: $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow s)$

e: $(p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim r$

I.8) Indique si cada una de las siguientes fórmulas corresponden a una tautología (T), a una contradicción (C) o a una contingencia (G).

a: $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ b: $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (p \wedge \sim q)$

c: $(p \wedge q) \Rightarrow r$ d: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

e: $(p \Rightarrow q) \vee (\sim q \Rightarrow \sim p)$

I.9) Las funciones proposicionales que aparecen en la aritmética y que solo contienen una variable (aunque ésta puede intervenir en varios lugares de la función dada), se pueden dividir en tres categorías:

i: Funciones que se satisfacen para todo número.

ii: Funciones que no se satisfacen para ningún número.

iii: Funciones que se satisfacen para algunos números y no se satisfacen para otros.

¿A cuáles de estas categorías pertenecen las funciones proposicionales siguientes?

$p(x)$: $x + 2 = 5 + x$ $s(x)$: $y + 24 > 36$

$q(x)$: $x = 49$ $t(x)$: $x + 2 > 5$

$r(x)$: $(y + 2) . (y - 2) < y^2$ $l(x)$: $x = 0$ ó $x < 0$ ó $x > 0$

I.10) Determinar los intervalos correspondientes a los siguientes expresiones (tener en cuenta que la multiplicación y división por un número negativo invierte la desigualdad)

a) $2x-3>0$ b) $|x| \le c$ c) $5<3x+10 \le 16$ d) $|x-3| <1$

e) $-2x + 3<7$ f) $2 \le x \le 6$ g) $3x-4 \le 8$ i) $x > 2 \wedge x \le -3$

j) $|x+1| > 4$

I.11) Encuentre el conjunto de verdad para cada una de las siguientes funciones proposicionales (U = IR):

a) Si $x =2$ entonces $x \neq 2$ b) $(3x = 6) \Leftrightarrow x = 2$

c) $-3 < x < 3 \wedge (x + 1 < 5)$ d) $-3\le x \le 2 \vee 0 \le x \le 4$

e) $(2x +1< 7 \Leftrightarrow x^2 =16) \wedge (x + 4 = 0)$ f) $-7x =14 \Leftrightarrow x = -2$

g) $- 3 \le x \le 3 \Leftrightarrow x^2 \le 9$ h) $2x + 1< -1 \wedge 2x - 4 \le 3x +1$

i) $x - 4 > ½ \vee x^3 \le 27$ j) $-2x + 4 >20 \Rightarrow -2x^2 + 6x -4$ $=0$

k) $(2x + 4)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x > -1$ l) $(x + 3 < 5) \Leftrightarrow x + 2 \ge 3$

m) si $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ n) si $x = 4 \Rightarrow x = 4$

II.- Conjuntos ordenados. Relaciones y funciones

II.A) Sumatoria

II.A.1) Desarrollar las siguientes sumatorias

a) $\sum_{i=1}^{6} \frac{(-1)i^i}{4i-2}$ b) $\sum_{k=1}^{7} 2k(3k-1)$

c) $\sum_{n=2}^{5} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ d) $\sum_{k=1}^{7} \frac{k(k-1)}{3k-2}$

II.A.2) Aplicando propiedades, desarrollar:

a) $\sum_{i=1}^{n}(x_i+1)^2$ b) $\forall n \in IN, \sum_{k=1}^{n} 2k.(k+2)$ c) $\forall n \in IN, \sum_{k=1}^{n} k.(k+1)$

II.B) El principio de Inducción Completa

II.B.1) Aplicando el P.I.C. demuestre las siguientes propiedades:

a) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$

b) $2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 2$

c) $1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$

d) $1+2+3+... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

e) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

f) $1.2+2.3+3.4+... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

g) $1 + 7 + 13 + ... + (6n - 5) = n(3n - 2)$

h) $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

II.C) Coordenadas Cartesianas y polares. Operaciones

II.C.1) Sean A = (2; 2); B =($\sqrt{3}$; 1); C = (0; 4) ; D = (-1/2; 1/2) ; E = (-2$\sqrt{3}$; -2) ; puntos de IR^2.

a) Obtenga la forma polar principal de cada uno de ellos.

b) Sean los puntos:

$\mathbf{Z_1}= (2 / 3\pi/4)$; $\mathbf{Z_2}= (\sqrt{3} / 3\pi/3)$; $\mathbf{Z_3} = (2\sqrt{2} / 4\pi/3)$; $\mathbf{Z_4}= (\sqrt{3} / 5\pi/6)$

Obtenga la forma cartesiana de los puntos dados.

c). Obtenga $X \in C$ en las siguientes ecuaciones:

I) X-A = B

II) 2X + B = C.D

III) X - 2D = E

IV) B.X - E = C

II.C.2) Resolver las siguientes operaciones

II.C.2.1) Sean los complejos: $Z_1= (2;2)$; $Z_2 = (2/ ¾\pi)$

a) $Z_1 . Z_2$. b) $Z_2 : Z_1$. c) $2 . Z_1^3$ d) Z_2^{-2} e) $\sqrt[3]{Z_2}$

II.C.2.2) Dados los complejos $Z_1 = -2i$ $Z_2 = (4/ 3\pi/2)$ $Z_3 = (1/ \pi/2)$**.** Encuentre Z operando en forma polar $\frac{z^4}{z_1} . z_3 = z_2$ y $\frac{z_1}{z_2} . z = z_3$

II.C.2.3) Sean $Z_1 = (-1,1)$, $Z_2 = (2/\,{}^{2\pi}\!/_{3})$ y $Z_3 = (-2,0)$ números complejos. Obtenga Z perteneciente a los complejos tal que $z^{z_1} = \dfrac{z_2}{z_3}$ y $z^i = \dfrac{z_1}{z_2}$

II.C.3) Exprese el valor principal de Z en cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $e^Z = 2 - 2y$
b) $(1 - i)^Z = i$
c) $Z^{3i} = 3 - 3\sqrt{3i}$
d) $Z/i = (-1 - i)^{2i}$
e) $e^{2Z} = -8$
f) $e^{Z+1} = (-2)^{3i}$

II.C.4) Determine los conjuntos de puntos del plano que satisfacen las siguientes relaciones:

a) $IR(Z) = -2.$
b) $-2 < \operatorname{Im}(Z) < 3.$
c) $|Z + 1| > 2.$
d) $-0{,}5 < IR(Z) < 0{,}5 \wedge |Z| = 2.$
e) $\frac{1}{4}\pi < \arg Z < \frac{3}{4}\pi \wedge |Z| < 2.$
f) $|Z - 1 + i| = 2.$
g) ${}^{2\pi}\!/_{3} \leq \arg Z \leq \frac{3}{4}\pi \wedge |Z| < 4$
h) ${}^{\pi}\!/_{6} \leq \arg Z \leq {}^{5\pi}\!/_{3} \wedge |Z-2| < 3$
i) ${}^{\pi}\!/_{3} < \arg Z \leq {}^{5\pi}\!/_{4} \wedge |Z| <$

BIBLIOGRAFIA

"INTRODUCCION MODERNA A LA MATEMATICA SUPERIOR"
Allendoerfer y Oakly
Editorial :Mac Graww-Hill. Segunda Edicion

"ARITMETICA ELEMETAL EN LA FORMACION MATEMATICA"
Enzo Gentile
Edipulbi S.A. 1991

"ALGEBRA"
Charles H.Lehmann
Limusa. 1976

"INTRODUCCION AL ALGEBRA"
Mischa Cotlar-Ratto de Sadosky
Eudeba.1977

"ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA"
Samuel Selzer
Nigar S.R.L. 1981

"ALGEBRA I"
Armando Rojo
El Ateneo .Segunda Edicion

"ALGEBRA Y GEOMETRIA"
Eugenio Hernandez
Universidad A. de Madrid.1987