SERIE DIDÁCTICVA N° 38

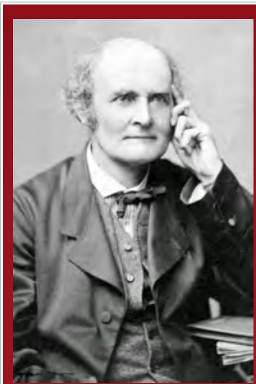
E-Book ISBN 978-987-1676-43-9
Fecha de catalogación: 19/12/2014.

FACULTAD DE CIENCIAS FORESTALES
Ing. Néstor René Ledesma

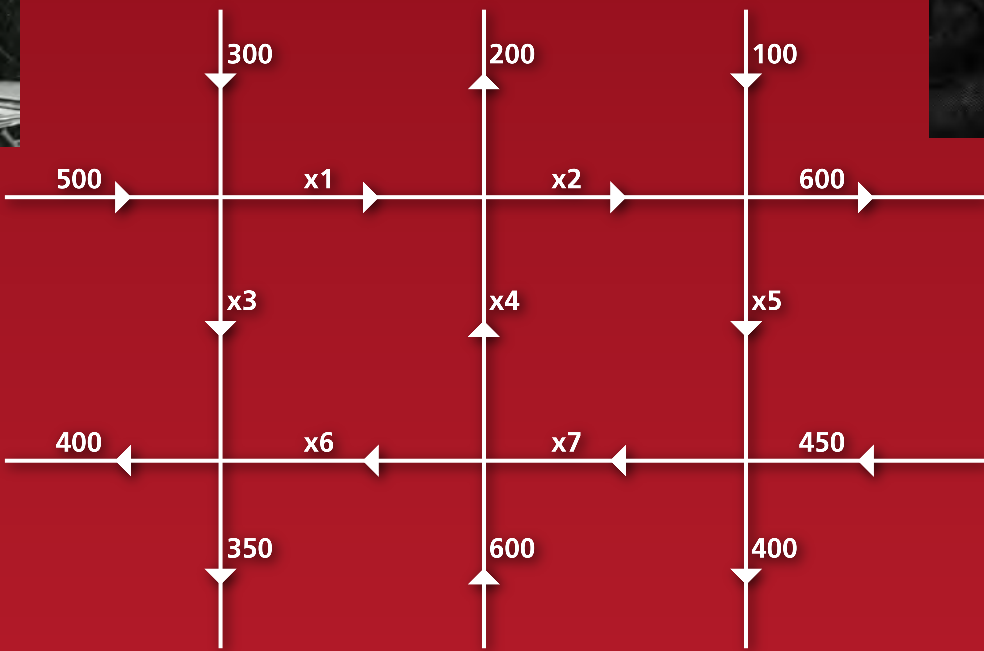
UNSE
Universidad Nacional de Santiago del Estero
39 aniversario

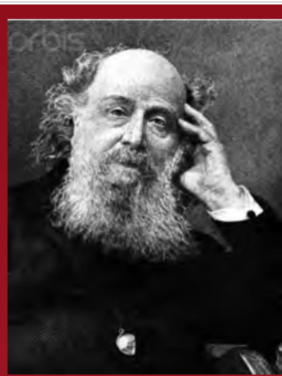
CÁTEDRA DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



Arthur Cayley
(1821-1895)





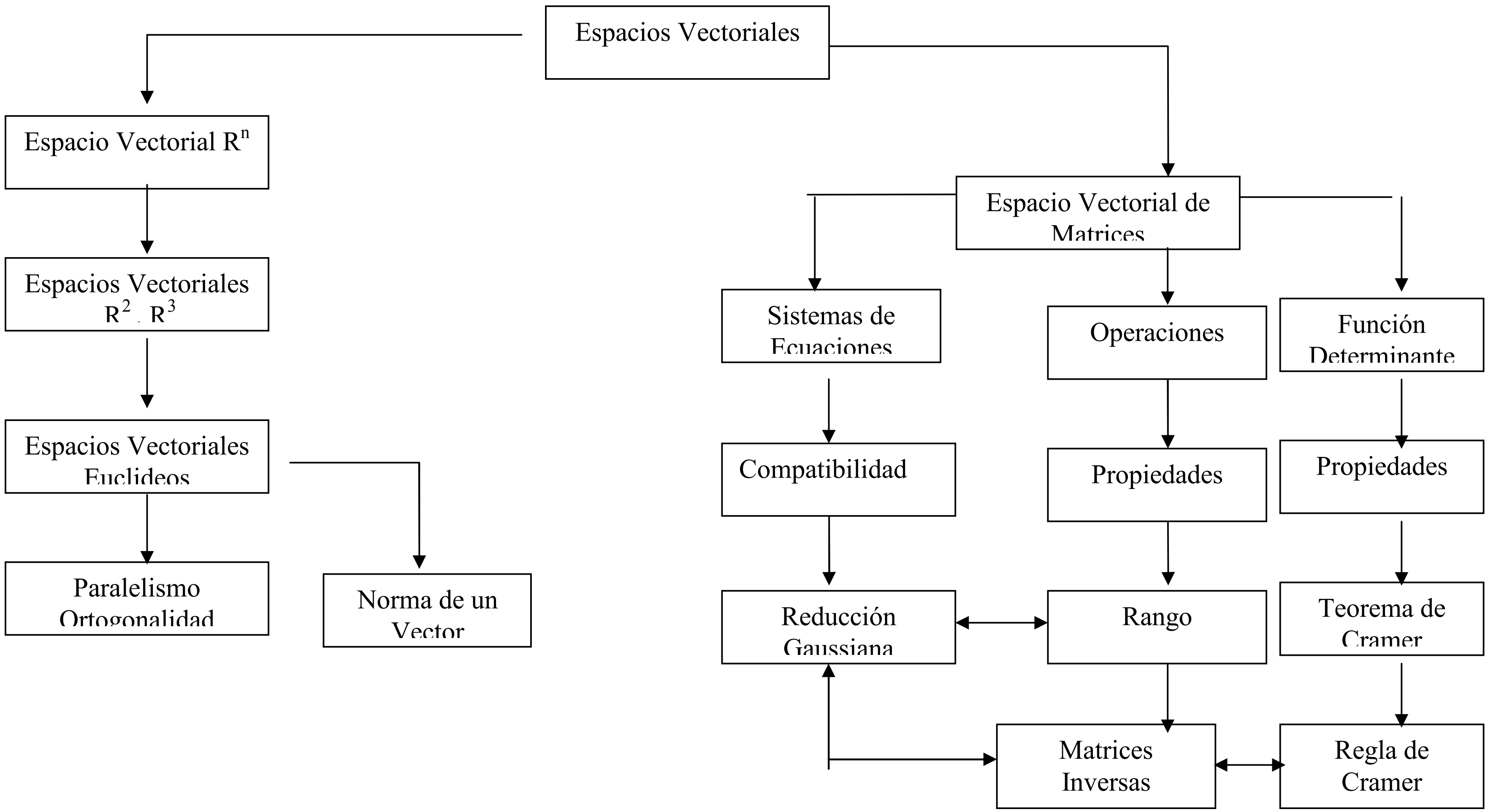
James Joseph Sylvester
(1814-1897)

Equipo docente
Josefa Sanguedolce
Elsa Ibarra de Gómez
Sylvia Nabarro de Ger
Claudia Cejas

Ayudantes estudiantiles
Oscar Barreto
Cintya Prado

MAYO DE 2012
Arte de tapa: Lic. Federico Soria

ESQUEMA CONCEPTUAL DE LA SERIE DIDACTICA



INTERPRETACION DE LA PORTADA

I.- La portada muestra las imágenes de destacados matemáticos Jamen Joseph Silvestre (1821-1879) Y Arthur Cayley (1821-1895) , quienes aportaron resultados muy importantes en la teoría de matrices , determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

II.- El gráfico representa el planteo del problema algebraico intitulado **"Análisis del flujo del tráfico"**, que a continuación se desarrolla.

Planteo del problema:
Sea una red de calles de un solo sentido en una ciudad grande.
Se quiere analizar el flujo del tráfico.

Desarrollo
La dirección del tráfico en cada una de las calles, está dada en la Figura de la tapa de la presente Serie Didáctica. En varios sitios se han colocado contadores, y el número promedio de carros que pasan por cada uno de ellos en el período de 1 hora, aparece también en la Figura antes referida. Las variables x_1 , x_2 , ……., x_6 y x_7 representan el número de autos por hora que pasan de la intersección A a la intersección B, de la intersección B a la intersección C, etc,

En primer lugar se determinan los valores posibles de cada x_i . Asumiendo que no hay paradas en el tráfico, el número de autos que llega a una intersección debe ser igual al número de autos que sale de la intersección. En base a este supuesto se obtiene el siguiente sistema-

$x_1+x_3 = 800$ (flujo de tráfico en intersección A)
$x_1- x_2 +x_4= 200$ (flujo de tráfico en la intersección B)
$x_2 - x_5= 500$ (flujo de tráfico en la intersección C)
$x_3 + x_6 =750$ (flujo de tráfico en la intersección F)
$x_4 + x_6 - x_7 = 600$ (flujo de tráfico en la intersección E)
$-x_5 + x_7 = 50$ (flujo de tráfico en la intersección D),

Empleando el método de reducción de Gauss-Jordan, la matriz aumentada de este sistema se reduce a

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 450 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 750 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema correspondiente es

$x_1 = x_6 + 50$
$x_2 = x_7 + 450$
$x_3 = -x_6 + 750$
$x_4 = -x_6 + x_7 + 600$
$x_5 = x_7 - 50$
$x_6 = x_6$
$x_7 = x_7$

No son permitidos valores negativos para las x_i , ya que como las calles son en una sola dirección, un valor negativo de x_i , sería interpretado como el número de autos que van en contramano. Con esta restricción tenemos $x_3 = 750 - x_6 \geq o$. O sea $x_6 \leq 750$.

Igualmente $x_5 = x_7 - 50 \geq 0$, o sea $x_7 \leq 50$.

Si se ahora se supone que la calle que va de D a E va a estar en reparación, por lo que se quiere que el tráfico en este espacio sea mínimo. Esto lleva a $x_7 = 50$.Por consiguiente, $x_2 = 500$ y $x_5 = 0$.

Recíprocamente si $x_5 = 0$, tenemos $x_7 = 50$. Entonces, si se cierra la carretera entre C y D se tiene el mínimo tráfico posible entre D y E. Los flujos x_1, x_3, x_4, y x_6 no están determinados en forma única .Si toda la distancia de D a F estuviera en reparación, se requeriría que x_6 fuera mínimo, o sea cero. En esta caso, $x_1 = 50$, $x_3 = 750$ y $x_4 = 650$.

Aprender es descubrir lo que ya sabemos

Hacer es demostrar lo que ya sabemos

Enseñar es recordar a otros que lo saben tan bien como nosotros.

Todos somos aprendices, hacedores, maestros.

Richard Bach

INTRODUCCION

En esta tercera Serie Didáctica la cátedra de Algebra y Geometría Analítica se propone los siguientes aspectos que se pretende desarrollar en los alumnos, a saber:

Resolver:

Los problemas como punto de partida dando a los alumnos un primer contacto con el tema, permitiendo un saber que permite adquirir los conceptos de los temas expuestos, puesto que los problemas planteados permiten usar los temas matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones en distintos contextos.

Analizar:

Una vez reconocidos los distintos contextos del uso de los temas desarrollados en la presente Serie Didáctica, se debe iniciar un proceso de reflexión acerca de cuáles de dichos temas pueden ser abordados por los alumnos y en que momento de su proceso madurativo de aprendizaje. De esta manera se da lugar al análisis para poder acceder a los conceptos nuevos que se proponen.

Estudiar:

Habiendo analizado los saberes a los que pueden acceder los estudiantes , se sigue con la acción de profundizar matemáticamente para lograr la formalización inherente a la ciencia matemática para lograr una adecuada fundamentación de los temas desarrollados.

Proponer:

La presente Serie Didáctica como guía en el proceso de aprendizaje de algunos contenidos del programa vigente de las asignaturas Algebra y Geometría Analítica y Matemática I correspondiente al ciclo básico de las carreras de Ingeniería Forestal, licenciatura en Ecología y C.del e Ingeniería en Industrias Forestales de la Facultad de Ciencias Forestales de la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

Año 2012

Lic. Josefa Sanguedolce

Prof. Responsable de la Disciplina Matemática

INDICE

Sin los recursos de la Matemática no sería

Posible comprender muchos pasajes de la

Sagrada Escritura.

San Agustín

I.-Espacio Vectorial de Matrices n x m

I.1.- Introducción

En la vida diaria es frecuente que se presenten situaciones en las que intervienen una gran cantidad de datos, a los cuales si se los ordena de manera conveniente en filas y columnas dan origen a lo que se conoce con el nombre de matrices.

Con el fin de obtener una ejemplificación de lo precedente se propone el siguiente ejemplo

Una empresa produce cuatro productos A,B,C y D. Para producir cada artículo se requieren cantidades especificas de dos materias primas: X y Y, y también cantidades determinadas de mano de obra. Se supone que la empresa desea adquirir las unidades de materia primas X y Y , y de mano de obra requeridas en la producción semanal de estos cuatro producto. En la tabla aparece la información muestral para tal caso. Por ejemplo, la producción semanal del producto A requiere 250 unidades de materia prima X, 160 unidades de materia prima Y y 80 unidades de mano de obra.

Producto	A	B	C	D
Unidades de materia prima X	250	300	170	200
Unidades de materia prima Y	160	230	75	120
Unidades de mano de obra	80	85	120	100

Se puede observar que los datos de esta tabla aparecen en forma natural en un arreglo rectangular. Si se suprimen los encabezados, se obtiene un arreglo rectangular de la forma:

$$\begin{pmatrix} 250 & 300 & 170 & 200 \\ 160 & 230 & 75 & 120 \\ 80 & 85 & 120 & 100 \end{pmatrix}$$

Este arreglo es un ejemplo de una matriz.

Se puede observar que los datos están dispuestos en tres filas y cuatro columnas, las primeras se identifican con las unidades de las materias primas y de mano de obra y las segundas a los productos.

I.2.- MATRICES

1.2.1.-Definición 1

Sea el siguiente cuadro:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\ 1 \leq i \leq n\ ,1 \leq j \leq m}$$

Un arreglo de esta naturaleza, cuyos elementos a_{ij} pertenecientes al conjunto de los números complejos, con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, se denomina matriz cuya notación es a través de las letras mayúsculas del abecedario.

Los subíndices i,j del elemento a_{ij} de la matriz identifican , respectivamente, la fila y la columna en las que esta situado a_{ij}.

La variación de los subíndices i, j determinan el orden de toda matriz.

Esta matriz es de orden nxm contiene n filas de tipo ($a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots a_{im}$) que constituyen las matrices filas.

y m columnas de tipo $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{ij} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$ que constituyen las matrices columna.

El conjunto de todas las matrices de orden (nxm) con elementos en un cuerpo K se denota mediante K^{nxm}.= { A= (a_{ij}) de orden (nxm) / $a_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$}

Este tipo de matrices se las reconocen por rectangulares cuando $n \neq m$; y cuando n=m las matrices se denominan matrices cuadradas de orden nxn o de orden n .

Las matrices cuadradas pertenecen al conjunto K^{nxn} .

$A \in K^{n\,xn}$ se puede denotar esta matriz a través de los elementos $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots A_n$ y se denota asi:

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n), \text{ donde } A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ . \\ . \\ . \\ a_{in} \end{bmatrix} \qquad \forall 1 \leq i \leq n$$

Observación:

El concepto de matriz puede definirse también de la siguiente manera

Sea I_n e I_m dos intervalos naturales iniciales, esto es:

$I_n = \{1, 2, 3, \ldots, i, \ldots, n\}$ $1 \leq i \leq n$

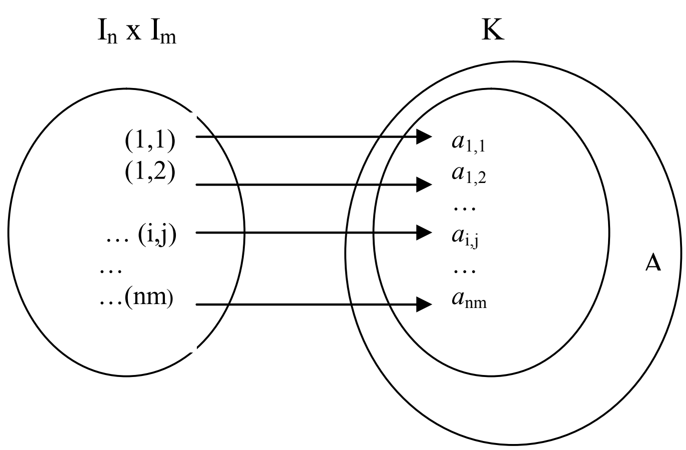
$I_m = \{1, 2, 3, \ldots j, \ldots, m\}$ $1 \leq j \leq m$

Sea K un cuerpo, llamaremos matriz nxm con elementos en el cuerpo K a toda función f definida por:

$f: I_n \times I_m \rightarrow K$

$$(i,j) \mapsto f(i,j) \overset{\text{def}}{=} a_{ij} \qquad 1 \leq i \leq n \;, 1 \leq j \leq m$$

La imagen del elemento (i,j) perteneciente al dominio de f, se denota por a_{ij} ,



Así la matriz A queda caracterizada por el conjunto de imágenes a_{ij} y suele escribirse como un cuadro de nxm elementos del cuerpo K dispuestos en n filas y m columnas.

En cada fila o renglón se escriben las imágenes de todos los pares ordenados que tienen la misma primera componente, y en cada columna se anotan las imágenes de todos los pares ordenados que tienen la misma segunda componente.

El elemento de la matriz que figura en la fila **i** y en la columna **j** se denota por a_{ij}, y es la imagen dada por f, del par (i,j).

Llamando A a la matriz cuyo elemento genérico es a_{ij}, escribiremos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le m$$

Observación: también se pueden estudiar las matrices desde el ámbito del Algebra Lineal.

I.2.2.-Igualdad de matrices

Dos matrices A=(a_{ij}) y B =(b_{ij}) , con $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, son iguales si :

- Son del mismo orden
- $\forall_i$, $\forall_j$ es $a_{ij} = b_{ij}$

Ejemplo

A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & -1 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} sen(0) & 1 \\ 1/2 & \cos(\pi) \end{pmatrix}$

Las matrices A y B son iguales.

I.3.-Operaciones con matrices:

I.3.1.-Suma de Matrices:

Sean A y B dos matrices de K^{nxm} su suma es otra matriz $S \in K^{nxm}$. Es decir:

$$+: K^{nxm} \times K^{nxm} \rightarrow K^{nxm}$$

$$(A, B) \rightarrow S = A + B$$

Donde $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{ij})_{nxm}$, su suma es:

$$S = (s_{ij})_{nxm} = (a_{ij})_{nxm} + (b_{ij})_{nxm} = (a_{ij} + b_{ij}) \quad ; \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$$

$$\forall\ 1 \leq j \leq m$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1j} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2j} & ... & b_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{i1} & b_{i2} & ... & b_{ij} & ... & b_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nj} & ... & b_{nm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & .. & a_{1j}+b_{1j} & ... & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2j}+b_{2j} & ... & a_{2m}+b_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & ... & a_{ij}+b_{ij} & ... & a_{im}+b_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & ... & a_{nj}+b_{nj} & ... & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & .. & s_{1j} & ... & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & ... & s_{2j} & ... & s_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ s_{i1} & s_{i2} & ... & s_{ij} & ... & s_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ s_{n1} & s_{n2} & ... & s_{nj} & ... & s_{nm} \end{pmatrix} = S \qquad \text{con } S \in K^{nxm}$$

Definición: la suma de dos o más matrices del mismo orden es otra matriz del mismo orden de las matrices sumandos dadas, donde cada elemento se obtiene a partir de la suma de los correspondientes elementos de las matrices sumandos.

Ejemplo

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{(2x3)} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{(2x3)}$$

La suma A+B esta dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}_{(2x3)}$$

I.3.2.-Multiplicación de un escalar por una matriz

Sean el escalar $\alpha \in K$, la matriz $A \in K^{nxm}$, se define el producto del escalar por la matriz, de la siguiente manera:

$$.: K \text{ x } K^{nxm} \to K^{nxm}$$
$$(\alpha, A) \to \alpha A$$

Sean $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $\alpha \in K$:

$$\alpha .A = \alpha.(a_{ij})_{nxm} \overset{def}{=} (\alpha a_{ij})_{nxm} \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$$
$$\forall\ 1 \leq j \leq m$$

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & .. & \alpha a_{1j} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2j} & \dots & \alpha a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{ij} & \dots & \alpha a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{nj} & \dots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

Definición: el producto de un escalar por una matriz de orden (nxm) es otra matriz de igual orden donde cada elemento es el producto del escalar por el elemento correspondiente de la matriz dada.

<u>Ejemplo</u>

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}_{(3x2)}$ y α =2 se tiene que $\alpha A = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}_{(3x2)}$

I.4.-Espacio vectorial de las matrices

La cuaterna (K^{nxm} , +, K, **.**) es un espacio vectorial , donde el conjunto de las matrices K^{nxm} es el conjunto de vectores de este espacio vectorial.

Esta cuaterna es un espacio vectorial si y sólo si se verifican los siguientes axiomas.

Como antes definimos la suma de matrices, esto es:

+: $K^{nxm} \times K^{nxm} \rightarrow K^{nxm}$

$(A, B) \rightarrow S = A + B$

donde $A = (a_{ij})_{nxm}$ y $B = (b_{ij})_{nxm}$, $S = (s_{ij})_{nxm} = (a_{ij})_{nxm} + (b_{ij})_{nxm} = (a_{ij} + b_{ij})$; $\forall\ 1 \le i \le n$

$\forall\ 1 \le j \le m$

Ax₁ : La suma de matrices es ley de composición interna

Ax₂: La suma de matrices es asociativa.

$$\forall A, B, C \in K^{nxm} : (A + B) + C = A + (B + C)$$

$(a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij})$ $\forall\ 1 \le i \le n$

$\forall\ 1 \le j \le m$

Ax₃: Existe el elemento neutro para la suma de matrices.

$$\exists\ 0_{nxm} \in K^{nxm} / \ \forall A \in K^{nxm} :\ A + 0_{mxn} = 0_{mxn} + A = A$$

$(a_{ij} + 0_{ij}) = (0_{ij} + a_{ij}) = (a_{ij})$ $\forall\ 1 \le i \le n$

$\forall\ 1 \le j \le m$

Nota: 0_{nxm} es la matriz nula de orden (nxm)

Ax₄: Existe Inverso aditivo u opuesto para cada matriz respecto de la suma de matrices

$$\forall A \in K^{nxm},\ \exists -A \in K^{nxm} :\ A + (-A) = (-A) + A = 0_{nxm}$$

$(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (-a_{ij}) + (a_{ij}) = 0 \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n$

$\forall\ 1 \leq j \leq m$

Ax₅: La suma de matrices es conmutativa

$$\forall A, B \in K^{nxm} :\ A + B = B + A$$

$A+B=(a_{ij})_{nxm} + (b_{ij})_{nxm} = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B+A \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n$

$\forall\ 1 \leq j \leq m$

Como antes definimos el producto de un escalar por una matriz:

$.: K \times K^{nxm} \to K^{nxm}$

$(\alpha, A) \to \alpha A$

Sean $A= (a_{ij})_{nxm}$ y $\alpha \in K$:

$\alpha .A = \alpha.(a_{ij})_{nxm} = (\alpha a_{ij}) = (\alpha a_{ij})_{nxm} \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n$

$\forall\ 1 \leq j \leq m$

Ax₆ : El producto de un escalar por una matriz es ley de composición externa

Ax₇: Asociatividad Mixta.

$\forall A \in K^{nxm},\ \forall \alpha, \beta \in K :(\alpha.\beta).A = \alpha.(\beta.A)$

$$(\alpha.\beta).A = (\alpha.\beta)(a_{ij})_{nxm} = (\alpha.\beta).(a_{ij}) = \alpha.(\beta.a_{ij}) = \alpha.(\beta.a_{ij})_{nxm} = \alpha.(\beta.A)$$

$\forall\ 1 \leq i \leq n\ ,\ \forall\ 1 \leq j \leq m$

Ax₈: Distributividad del producto en K^{nxm} respecto de la suma en *R*.

$\forall A \in K^{nxm}, \forall \alpha, \beta \in K : (\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$

$$(\alpha + \beta).A = (\alpha + \beta).(a_{ij})_{nxm} = (\alpha + \beta).(a_{ij}) = \alpha.(a_{ij}) + \beta.(a_{ij}) =$$

$$=\left(\alpha.a_{ij}\right)_{nxm}+\left(\beta.a_{ij}\right)_{nxm}=\alpha.A++\beta.A \qquad \forall\ 1\leq i\leq n\ ,\ \forall\ 1\leq j\leq m$$

Ax₉: Distributividad del producto en K respecto de la suma en K^{nxm}.

$$\forall\alpha\in K\wedge\forall A,B\in K^{nxm}\ :\alpha.(A+B)=\alpha.A+\alpha.B$$

$$\alpha.\left(A+B\right)=\alpha\left[\left(a_{ij}\right)_{nxm}+\left(b_{ij}\right)_{nxm}\right]=\alpha.(a_{ij}+b_{ij})=\alpha.(a_{ij})+\alpha.(b_{ij})=$$

$$=\alpha.\left(a_{ij}\right)_{nxm}+\alpha.\left(b_{ij}\right)_{nxm}=\alpha.A+\alpha.B \qquad \forall\ 1\leq i\leq n\ ,\ \forall\ 1\leq j\leq m$$

Ax₁₀: $\forall A\in K^{nxm}\ :1.A=A.1=A$

En particular si m=n, tenemos (K^{nxn} , +, K, **.**) que es el espacio vectorial de las **matrices cuadradas.**

Se prueban a manera de ejemplo algunos de los axiomas enunciados:

i) Tomemos el **Ax₃**

$\exists\ 0_{nxm}\in K^{nxm}/\ \forall A\in K^{nxm}:\ A+0_{mxn}=0_{mxn}+A=A$

$$A+0_{mxn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & ... & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2m}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{im}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nm}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & .. & x_{1j} & ... & x_{1m}\\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2j} & ... & x_{2m}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ x_{i1} & x_{i2} & ... & x_{ij} & ... & x_{im}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nj} & ... & x_{nm}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+x_{11} & a_{12}+x_{12} & .. & a_{1j}+x_{1j} & ... & a_{1m}+x_{1m}\\ a_{21}+x_{21} & a_{22}+x_{22} & ... & a_{2j}+x_{2j} & ... & a_{2m}+x_{2m}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ a_{i1}+x_{i1} & a_{i2}+x_{i2} & ... & a_{ij}+x_{ij} & ... & a_{im}+x_{im}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ a_{n1}+x_{n1} & a_{n2}+x_{n2} & ... & a_{nj}+x_{nj} & ... & a_{nm}+x_{nm}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Tomando la i-ésima fila y por igualdad de matrices tenemos la igualdad de la i.-ésima fila:

$$\left(a_{i1}+x_{i1} \quad a_{i2}+x_{i2} \quad ... \quad a_{ij}+x_{ij} \quad ... \quad a_{im}+x_{im}\right)=\left(a_{i1} \quad a_{i2} \quad ... \quad a_{ij} \quad ... \quad a_{im}\right)$$

$$a_{ij}+x_{ij}=a_{ij}$$

Teniendo en cuenta la existencia del opuesto de todo elemento en el cuerpo de los números reales, se tiene

$$x_{ij}=a_{ij}-a_{ij}$$
$$x_{ij}=0$$

Por lo tanto, se deduce la matriz 0 de orden (nxm) denominada matriz nula del espacio vectorial, y se escribe del siguiente modo:

$$0=\begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & .. & 0_{1j} & \cdots & 0_{1m} \\ 0_{21} & 0_{22} & \cdots & 0_{2j} & \cdots & 0_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{i1} & 0_{i2} & \cdots & 0_{ij} & \cdots & 0_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{n1} & 0_{n2} & \cdots & 0_{nj} & \cdots & 0_{nm} \end{pmatrix}_{(nxm)}$$

ii) Probando el **Ax**$_4$ se obtiene la opuesta de toda matriz

Sean entonces $\forall A \in \mathrm{K}^{\mathrm{nxm}}$, $\exists -A \in \mathrm{K}^{\mathrm{nxm}}$: $A+(-A)=(-A)+A=0_{nxm}$

Con

$$A+X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & .. & x_{1j} & ... & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2j} & ... & x_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{i1} & x_{i2} & ... & x_{ij} & ... & x_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nj} & ... & x_{nm} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+x_{11} & a_{12}+x_{12} & .. & a_{1j}+x_{1j} & ... & a_{1m}+x_{1m} \\ a_{21}+x_{21} & a_{22}+x_{22} & ... & a_{2j}+x_{2j} & ... & a_{2m}+x_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1}+x_{i1} & a_{i2}+x_{i2} & ... & a_{ij}+x_{ij} & ... & a_{im}+x_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}+x_{n1} & a_{n2}+x_{n2} & ... & a_{nj}+x_{nj} & ... & a_{nm}+x_{nm} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & .. & 0_{1j} & ... & 0_{1m} \\ 0_{21} & 0_{22} & ... & 0_{2j} & ... & 0_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0_{i1} & 0_{i2} & ... & 0_{ij} & ... & 0_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0_{n1} & 0_{n2} & ... & 0_{nj} & ... & 0_{nm} \end{pmatrix}$$

Tomando la i-ésima fila y por igualdad de matrices tenemos la igualdad de la i.-ésima fila

$$\begin{pmatrix} a_{i1}+x_{i1} & a_{i2}+x_{i2} & ... & a_{ij}+x_{ij} & ... & a_{im}+x_{im} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0_{i1} & 0_{i2} & ... & 0_{ij} & ... & 0_{im} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}+x_{ij}=0_{ij}$$

$$x_{ij}=-a_{ij}$$

Por lo tanto, se deduce la matriz X de orden (nxm) denominada matriz opuesta de la matriz A del espacio vectorial, también se escribe X = -A, denotada por:

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & .. & -a_{1j} & ... & -a_{1m} \\ -a_{21} & -a_{22} & ... & -a_{2j} & ... & -a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_{i1} & -a_{i2} & ... & -a_{ij} & ... & -a_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_{n1} & -a_{n2} & ... & -a_{nj} & ... & -a_{nm} \end{pmatrix}_{(nxm)}$$ o bien -A = $(-a_{ij})_{nxm}$

I.4.1.-Diferencia de matrices

Del axioma **Ax4** se deduce la operación diferencia de matrices que se define de la siguiente manera**:**

Sean $A \in K^{nxm}$, $B \in K^{nxm}$: $A - B \overset{def}{=} (A) + (-B)$

$$\text{A-B}= (a_{ij})_{nxm} - (b_{ij})_{nxm} \overset{def}{=} (a_{ij})_{nxm} + (-b_{ij})_{nxm} = \text{A} + (-B) \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n\ ,\ \forall\ 1 \leq j \leq m$$

I.4.2.-Multiplicación de Matrices

Definición*:*

Sean $A \in K^{m\,x\,p}$, $B \in K^{p\,x\,n}$ y $P \in K^{m\,x\,n}$. El producto A.B se define como la matriz de dimensión (mxn) cuyo elemento de la i.ésima fila y la j.ésima columna se obtiene sumando el producto de los elementos de la i-ésima fila de A ,por los elementos de la j-ésima columna de B, Simbólicamente tenemos:

$$A.B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1j} \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2j} \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots. & \ldots.. & \ldots. \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots a_{ij} \ldots \quad a_{ip}} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mj} \ldots & a_{mp} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots b_{1j} \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots b_{2j} \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots b_{ij} \ldots & b_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots b_{pj} \ldots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots p_{1j} \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots p_{2j} \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots.. & \ldots. \\ p_{i1} & p_{i2} & \ldots \boxed{p_{ij}} \ldots & p_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m1} & p_{m2} & \ldots p_{mj} \ldots & p_{mn} \end{pmatrix} = P$$

Por ejemplo para obtener p_{11} se suman los productos de la primera fila de la primera matriz por la primera columna de la segunda matriz $p_{11} = a_{1\,1}.b_{11} + a_{1\,2}.b_{2\,1} + \ldots\ldots.. + a_{1\,p}.b_{p\,1}$,

para obtener p_{21} se suman los productos de la segunda fila de la primera matriz por la primera columna de la segunda matriz $p_{21} = a_{2\,1}.b_{11} + a_{22}.b_{2\,1} + \ldots\ldots.. + a_{\,2\,p}.b_{p\,1}$,

Análogamente para obtener p_{ij} se suman los productos de la i.ésima fila de la primera matriz por la j.ésima columna de la segunda matriz

$$p_{i\,j} = a_{i\,1}.b_{1\,j} + a_{i\,2}.b_{2\,j} + \ldots. + a_{ij}.b_{jj} + \ldots.. + a_{i\,p}.b_{pj} \text{ con } 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

Luego la definición del producto se puede simbolizar:

$$A\,.\,B = P \Leftrightarrow p_{\mathrm{i\,j}} = \sum_{k=1}^{\mathrm{p}} a_{i\,k}.b_{k\,j} = a_{i\,1}.b_{1\,j} + a_{i\,2}.b_{2\,j} + \ldots. + a_{i\,j}.b_{j\,j} + \ldots.. + a_{i\,p}.b_{p\,j}$$

con $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{m}$, $1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{n}$

Observación:

1.-Para que dos matrices se puedan multiplicar, la primera debe tener tantas columnas como filas la segunda; este tipo de matrices se denominan matrices conformables. La matriz que resulta de la operación tendrá tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.

2.-La multiplicación de matrices no es conmutativa. Si bien dos matrices cuadradas pueden multiplicarse en cualquier orden, el resultado en general no es el mismo.

I.4.2.-Propiedades del producto entre matrices

- El producto de matrices del conjunto $\mathrm{K}^{\mathrm{mxn}}$ verifica las siguientes propiedades

Prop._1 Asociatividad del Producto de Matrices

$\forall A \in \mathrm{K}^{\mathrm{m\,x\,p}}, B \in \mathrm{K}^{\mathrm{p\,x\,n}}, C \in \mathrm{K}^{n\,x\,\mathrm{t}} : (A.B).C = A.(B.C)$

Prop._2: Distributividad del Producto respecto de la Suma de matrices

$\forall A \in \mathrm{K}^{\mathrm{m\,x\,p}}, B \in \mathrm{K}^{\mathrm{p\,x\,n}}, C \in \mathrm{K}^{p\,x\,\mathrm{n}} : A\,.(\,B + C\,) = A\,.B + A\,.\,C\,)$

$\forall A \in \mathrm{K}^{\mathrm{m\,x\,p}}, B \in \mathrm{K}^{\mathrm{mxp}}, C \in \mathrm{K}^{p\,x\,\mathrm{n}} : (\,A + B\,).C = A\,.C + B.\,C\,)$

Prop._3: $\forall A \in \mathrm{K}^{\mathrm{m\,x\,p}}, B \in \mathrm{K}^{\mathrm{p\,x\,n}}, \alpha \in \mathrm{K} : \alpha.(A.B) = (\alpha.A).B = A.(\alpha.B)$

I.5.-Matrices Particulares

I.5.1.-Matriz Diagonal: es aquella en que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos. La matriz $A \in K^{nxn}$ es diagonal $\Leftrightarrow$ ($\forall$ i $\neq$ j $\Rightarrow$ $a_{ij} = 0$).
La matriz diagonal $A \in K^{nxn}$ es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & .. & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{ij} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Los siguientes son ejemplos de una matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I.5.2.-Matriz Escalar: es aquella matriz diagonal en que los elementos de la diagonal principal son todos iguales. La matriz $A \in K^{nxn}$ es escalar $\Leftrightarrow$ [($\forall$ i $\neq$ j $\Rightarrow$ $a_{ij} = 0$) $\wedge$ ($\forall$ i = j $\Rightarrow$ $a_{ij} = \alpha$)].
La matriz escalar A se denota como

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

<u>I.5.3.-Matriz Identidad</u>**:** es aquella matriz escalar en la que $\alpha = 1$.La denotamos con $\mathbf{I} \in K^{nxn}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}$$

<u>I.5.4.-Matriz Triangular Superior</u> es la matriz en la cual todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son ceros.

La matriz $A \in K^{nxn}$ es triangular superior $\Leftrightarrow \forall\, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

La matriz triangular superior A se denota como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Son ejemplos de Matrices triangulares superiores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1/4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3x3} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}$$

<u>Matriz Triangular Inferior</u> es la matriz en la cual todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son ceros.

La matriz A $\in$ K^{nxn} es triangular inferior $\Leftrightarrow$ $\forall$ i < j $\Rightarrow$ $a_{ij} = 0$.
La matriz triangular inferior A se denota como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & .. & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Son ejemplos de Matrices triangulares inferiores

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1/4 & 6 \end{pmatrix}_{3x3}$$

En particular para las matrices pertenecientes al conjunto K^{nxn} se verifican las siguientes proposiciones.

I.6.-Proposiciones

Prop._1: Distributividad del Producto respecto de la Suma de matrices.

$\forall A, B \ , C \in K^{nxn} : A .(B \ + C) = A .B \ + A \ . \ C$

$: (A \ + \ B \ ).C \ = A .C \ + B \ . \ C$

Prop._2: $\forall A \in K^{n\,x\,n} , I_n \in K^{nxn} : I_n .(A.B) = (I_n .A).B = A.(I_n .B)$

Prop._3: $\forall A \in K^{nxn}$: $AI_n = I_n A = A$ donde I_n es la matriz unidad o identidad de orden *nxn.*

Proposición

Sean A, B, C, matrices, si están definidos los productos B.C y A.(B.C) entonces también están definidos los productos A.B y (A.B).C y se cumple que A.(B.C)=(A.B).C

Demostración

Sean $A \in K^{sxm}$, $B \in K^{mxn}$ y $C \in K^{nxp}$, para probar la proposición se debe primero probar que las matrices son conformables para producto de ambos miembros de la igualdad y luego que ambos miembros son identicos.

1.-Las matrices B y C son conformables, el producto de ellas da una matriz de orden (mxp) y es conformable para efectuar el producto con la matriz A, resultando otra matriz producto de orden (sxp), con lo que se demuestra la posibilidad de efectuar A.(B.C).

Asimismo, las matrices A y B son conformables por lo que es posible el producto de A.B , resultando la matriz de orden (sxn) conformable con la matriz C, resultando el producto (A.B).C de orden (sxp).

2.-A continuación se procede a probar la otra condición para la igualdad de dos o mas matrices, esto es probar que sus elementos son iguales.

Continuando con la demostración se tiene:

$[A(BC)]_{ij} = [(AB)C]_{ij}$

Tomando el primer miembro de la igualdad, resulta:

$[A(BC)]_{ij} = \sum_h a_{ih} [BC]_{hj}$ por propiedad de sumatoria y por multiplicación de matrices se escribe

$$\sum_h a_{ih} \sum_k b_{hk} c_{kj} = \sum_h \sum_k a_{ih} b_{hk} c_{kj} = \sum_k \sum_h a_{ih} b_{hk} c_{kj} = \sum_k \left(\sum_h a_{ih} b_{hk} \right) c_{kj} = \sum_k c_{kj} [AB]_{ik} = [(AB)C]_{ij}$$

Con lo cual queda probado la igualdad de elementos de las matrices .

Probados 1 y 2 queda demostrada la proposición dada.

I.7.-Inversa de una matriz cuadrada

La matriz $A \in K^{nxn}$ es no singular, iversible o regular si y solo si existe una matriz $B \in K^{nxn}$ tal que su producto por A, a izquierda y a derecha, es la matriz identidad del mismo orden de las matrices dadas.

$A \in K^{nxn}$ es inversible $\Leftrightarrow \exists B \in K^{nxn} \,/\, AB = BA = I_n$

A la inversa de una matriz A, si existe, se la denota como $A^{-1} \in K^{nxn}$

La inversa de una matriz A $\in K^{nxn}$, si existe, es única.

Ejemplo

La inversa de la matriz A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz B= $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puesto que

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

$$B.A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

<u>I.7.1.-Propiedad</u>

Si existe la matriz $A^{-1} \in K^{nxn}$ de la matriz $A \in K^{nxn}$ **,** se verifica que **:**

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

Observación : El lector puede demostrar la propiedad enunciada.

I.8.- Matrices especiales

<u>I.8.1.-Matriz Transpuesta</u>**:** se llama transpuesta de la matriz $A \in K^{nxm}$ a la matriz que se obtiene de intercambiar las filas y columnas de la matriz A. Se la designa de la forma A^t.

La transpuesta de la matriz $A=[a_{ij}]$ es la matriz $A^t = [a_{ji}]$ $\forall\ 1 \leq i \leq m$, $\forall\ 1 \leq j \leq n$, es decir que la i-ésima fila de A es la i-ésima columna de A^t.

Ejemplos: Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{1x3}$$

Entonces sus transpuestas son

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{3x2} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \quad C^t = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3x1}$$

I.8.1.1.-Propiedades

i) Sea A $\in K^{nxm}$, entonces $(A^t)^t = A$

ii) Sea A $\in K^{nxm}$ y α un escalar, entonces $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

iii) Sean A y B $\in K^{nxm}$, entonces $(A+B)^t = A^t + B^t$

iv) Sean A $\in K^{nxm}$ y B $\in K^{mxp}$, entonces $(A.B)^t = B^t . A^t$

Se prueba esta última propiedad, cuyo enunciado es:

La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto de las traspuestas en orden permutado.

En símbolos es:

Sean A$\in$ K ^{nxp} y B$\in$ K ^{pxm} $\Rightarrow (AB)^t = B^t A^t$

Demostración

C=AB$\Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj}$

c_{ij} es el elemento de la fila j y de la columna i de de la traspuesta de la matriz C.

Los elementos b_{1j} , b_{2j} ,………,b_{pj}

De la columna j-ésima de B, lon los de la fila j de B^t .

Análogamente, a_{i1} , a_{i2} ,……..,a_{ip} son los elementos de la columna i-ésima de A^t

Entonces, el elemento de la fila j y de la columna i de B^tA^t es

$b_{1j}\, a_{i1} + b_{2j}\, a_{i2} + \ldots + b_{pj}\, a_{ip} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

En consecuencia $(AB)^t = B^t A^t$

I.8.2.-Matriz simétrica

$A \in K^{pxm}$ es simétrica si y solo si $A = A^t$

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$ su transpuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$

I.8.3.-Matriz antisimétrica

$A \in K^{pxm}$ es antisimétrica si y solo si $A = -A^t$

Los elementos de la diagonal principal de toda matriz antisimétrica son nulos, pues:

$A \in K^{nxm}$ es antisimétrica $\Rightarrow a_{ii} = -a_{ii}, \forall i \Rightarrow 2a_{ii} = 0, \forall i \Rightarrow a_{ii} = 0, \forall i$

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}_{3x3}$ es antisimétrica

I.8.3.1.-Proposiciones

Prop.1.- El producto de toda matriz por su transpuesta es una matriz simétrica.

Prop.II.- La suma de toda matriz cuadrada con su transpuesta es simétrica.

Prop.III.-La diferencia de toda matriz cuadrada con su transpuesta es antisimétrica.

I.9. Modelos matriciales

Observación

Para el estudio de los modelos propuestos el alumno deberá remitirse al libro "Aplicaciones de Algebra Lineal" de Chris Rorres.Howard Antón.

Editorial Limusa

Administración de bosques

1.- Este es un modelo simplificado aplicable a la explotación racional duradera de un bosque cuyos árboles se han clasificado por alturas.

Se supondrá que la altura de un árbol determina su valor económico al corte y a la venta. Se inicia con una cierta distribución de árboles de diferentes alturas y luego se deja crecer el bosque durante un cierto período; después se cortan algunos árboles de diferente altura y los que se dejan sin cortar deben tener la misma configuración de alturas del bosque original para que la explotación sea racional y duradera. Hay muchos procedimientos para lograr una explotación que corresponda a tales características y se tratará de encontrar uno en el que el valor económico de los árboles cortados sea lo mas alto posible. Esto determinará el rendimiento óptimo duradero del bosque y corresponde al máximo rendimiento posible de explotación continua del bosque sin que se agote.

Conceptos Previos Fundamentales: Multiplicación y adición de matrices.

Teoría de juegos

2.- Se analiza un juego de tipo general en el cual dos jugadores compiten con diferentes estrategias para lograr objetivos opuestos. Se aplica la técnica de las matrices para determinar cuál es la estrategia óptima de cada jugador.

Conceptos Previos fundamentales: Multiplicación de matrices.

Observación

Para el estudio del siguiente modelo matemático el alumno deberá remitirse al libro Ecología Matemática. Principios y Aplicaciones.

Fernando Momo- Angel Capurro

Editorial: Ediciones cooperativas. Buenos Aires- Edición 2006

Conceptos previos fundamentales

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Modelos matriciales de poblaciones

Cuando utilizamos modelos matemáticos para describir el crecimiento de las poblaciones o las interacciones entre ellas, asumimos que los individuos que las componen son iguales entre sí, de esta manera "olvidamos" intencionalmente, para no complicar excesivamente los modelos, la información acerca de las diferentes edades, estadíos, tamaños individuales o diferentes potenciales reproductivos de los individuos. Una de las formas de incluir parte de esa información en los modelos es el uso de ***modelos matriciales***. En este tipo de modelos, la población es definida por un **vector de estado** cuyos elementos representan las abundancias de diferentes subgrupos de la población, por ejemplo edades o estadíos. Así, si en un momento dado la población que estamos estudiando está formada por 30 individuos juveniles, 57 adultos y 12 seniles, podemos representarla por un vector

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} 30 \\ 57 \\ 12 \\ \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

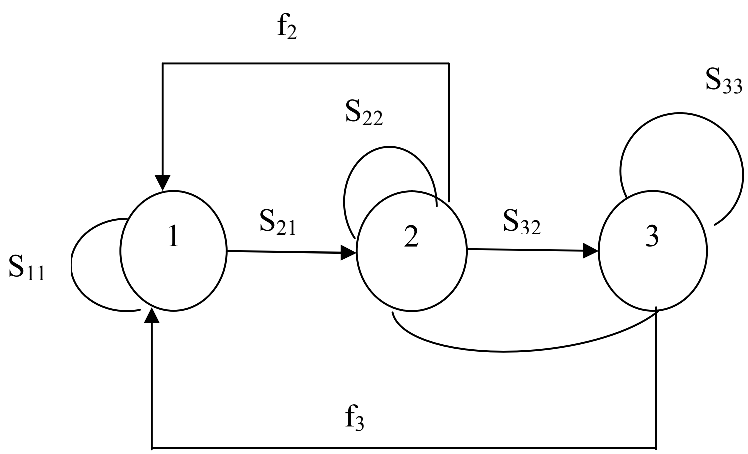
donde los números son los elementos del vector y representan la abundancia de cada estadío. Ahora podemos incluir en nuestro modelo información acerca de las diferentes probabilidades de supervivencia y potenciales reproductivos de cada estadío. Nótese que estamos considerando un crecimiento *discreto* de la población y, entonces, esa información estará sintetizada en una **matriz de transición** cuyos elementos representan los aportes de cada elemento del vector (cada estadío) en un momento dado (por ejemplo un año) a cada uno de los estadíos en el momento siguiente (por ejemplo el año siguiente). A la matriz de transición le llamaremos **A**, de manera que podemos sintetizar nuestro modelo como:

$$\vec{n}_{t+1} = A.\vec{n}_t \qquad (5.2)$$

Por ejemplo podemos escribir el modelo de una población con tres estádios:

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} s_{11} & f_2 & f_3 \\ s_{21} & s_{22} & a_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_t \qquad (5.3)$$

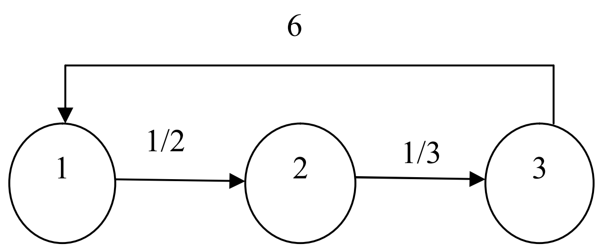
Vemos que los elementos de la primer fila de la matriz son los aportes de cada estadío al estadío inicial en el año siguiente, es decir la supervivencia del estadío 1 y las *fecundidades* de los estadíos 2 y 3. Los elementos de la subdiagonal representan los aportes de cada estadío al siguiente en el año siguiente. Los de la diagonal, los aportes de cada estadío a sí mismo en el año siguiente. Algunos de estos elementos o de los restantes pueden tener sentido biológico sólo cuando son nulos y eso depende de cómo estemos definiendo los estadíos y el modelo. Por ejemplo, si los estadíos son edades cronológicas absolutas, los elementos diagonales distintos de cero no tendrían sentido porque ningún organismo puede tener la misma edad cronológica dos años seguidos, tampoco el elemento a_{23} del ejemplo porque un organismo no puede ser más joven al año siguiente de lo que era este año; en cambio, si los estadíos son diferentes estados fenológicos de una planta, puede haber "vueltas atrás" o aportes de un elemento a sí mismo. Esto se comprende mejor si representamos el ciclo de vida en forma de grafo:



Todo grafo orientado como este tiene asociada una matriz, cada flecha corresponde a un elemento no nulo de la matriz donde el elemento que aporta es el que corresponde a la columna y el que recibe a la fila. Si damos valores arbitrarios a las flechas del grafo anterior y escribimos la matriz resultante, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 18 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

¿Por qué decimos que los modelos matriciales nos aportan más información que sus equivalentes simplificados? Para comprender esta afirmación vamos a empezar por un ejemplo clásico: la matriz de Bernardelli que es la matriz de transición del ejemplo numérico anterior. Ésta matriz fue originalmente (1941) planteada para un problema demográfico pero para nuestros fines inventaremos una interpretación más ecológica. Supondremos que representa el ciclo de vida de un insecto; también que representa sólo la dinámica de las hembras, tal y como se hace en las tablas de vida, para que tenga sentido el valor de fecundidad. Se consideran tres estadíos: larvas, pupas y adultos: Esto significa que en el valor de fecundidad estamos colapsando la fecundidad *sensu stricto* y la supervivencia de los huevos a larvas; suponemos además que ningún estadío sobrevive como tal al año siguiente: las larvas pasan a pupas o mueren, las pupas pasan a adultos o mueren y las hembras adultas mueren después de reproducirse; esto asegura que todos los elementos diagonales tendrán valor 0. Por último, y obviamente, sólo las hembras adultas se reproducen y por lo tanto sólo la f_3 no es nula. El grafo que representa este ciclo de vida es el siguiente:



Si construimos la tabla de vida correspondiente y calculamos la tasa de crecimiento discreta R_0 de esta población obtenemos:

$$R_0 = f_1 + s_{21}.f_2 + s_{21}.s_{32}.f_3 = 0 + \tfrac{1}{2}.0 + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3}.6 = 1 \qquad (5.5)$$

Como vemos, la población es estable a largo plazo, no crece ni decrece, ¿eso es todo lo que podemos decir? Observemos

Tiempo	Larvas	Pupas	Adultos
0	10	12	3
1	18	5	4
2	24	9	1.67
3	10	12	3
4	18	5	4

5	24	9	1.67
6	10	12	3
7	18	5	4
8	24	9	1.67
9	10	12	3
10	18	5	4

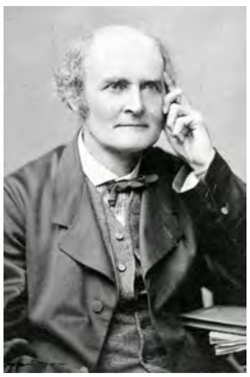
qué pasa si simulamos el comportamiento de la población utilizando nuestro modelo matricial; definimos un vector de estado inicial para la población, multiplicamos la matriz de transición por ese vector y obtenemos el vector de la población al año uno (es lo que está representado en la ecuación 4), multiplicamos la matriz por este vector y obtenemos el vector del año dos y así sucesivamente; ¿cuál es el resultado de este proceso?

Tiempo	Larvas	Pupas	Adultos
0	10	12	3
1	18	5	4
2	24	9	1.67
3	10	12	3
4	18	5	4
5	24	9	1.67
6	10	12	3
7	18	5	4
8	24	9	1.67
9	10	12	3
10	18	5	4

Más allá de la presencia de valores fraccionarios que, en realidad, deberíamos interpretar como densidades, aparece aquí un comportamiento que la tabla de vida no permitía sospechar, hay oscilaciones periódicas en la abundancia de la población, ¿podríamos haber predicho esto a partir del análisis de la matriz? La respuesta es sí.

I.10.-PRECURSORES DE LA TEORIA DE MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El primero que empleó el término ''matriz'' fue el inglés James Joseph Sylvester en el año 1850. Sin embargo, hace más de dos mil años los matemáticos chinos habían descubierto ya un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales equivalente al método de Gauss y por lo tanto, empleaban tablas con números.
Prueba de ello es que el método aparece en *Los Nueve Capítulos*, la obra matemática china más importante de la antigüedad.



Sin embargo hay que esperar hasta el siglo XIX para que se desarrolle una de las herramientas más importantes de la matemática: el álgebra de matrices. A ella contribuyeron diversos matemáticos, entre ellos los ingleses Cayley y Sylvester, a quienes algunos historiadores han bautizado como" los gemelos

James Joseph Sylvester nació el 3 de septiembre de 1814 en Londres en el seno de una familia judía lo que representó, en ocasiones, un obstáculo para su carrera. Arthur Cayley nació el 16 de agosto de 1821 en Richmond. Ambos matemáticos, que fueron amigos, tuvieron algunas características en común:

• Una gran inteligencia que se puso de manifiesto en los primeros años escolares.
• Ambos estudiaron en Cambridge aunque en distintos años debido a la diferencia de edad. Sylvester fue alumno de otro algebrista notable De Morgan.

• Tenían una gran variedad de aficiones diferentes a las matemáticas: leer, viajar, pintar, etc.
• Al no poder conseguir un puesto fijo en la Universidad decidieron estudiar Derecho para poder vivir aunque nunca perdieron su pasión por las matemáticas. Se conocieron siendo abogados.
• Trabajaron en matemáticas hasta edades muy avanzadas y consiguieron al final de su vida una cátedra en la Universidad.

• Ambos lucharon para conseguir que la mujer pudiese estudiar en la Universidad.

En aquel tiempo las mujeres no podían asistir a clase.

Cayley es uno de los matemáticos más prolíficos de la historia siendo uno de los primeros en estudiar las matrices de forma sistemática. En 1858 publicó unas "Memorias sobre la teoría de matrices" en la que daba la definición de matriz, suma de matrices, de producto de un número real por una matriz, de producto de matrices y de inversa de una matriz. Cayley afirma que obtuvo la idea de matriz a través de la de determinante y también como una forma conveniente de expresar transformaciones geométricas.(Fuente: BOYER, C. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1986- BELL, ET. *Men of Mathematics*. Simon and Schuster, New York, 1937 (En Internet existe una versión en castellano))

En las cuestiones matemáticas no se comprende la indecisión ni la duda, así como tampoco se pueden establecer distinciones entre medias verdades y verdades de grado superior .

Hilbert

II-Sistemas de ecuaciones lineales

A menudo se presentan problemas que pueden plantearse por medio de ecuaciones, las que pueden tener una o más incógnitas. Sea la siguiente situación:

Un productor tiene tres tipos de fertilizantes G_1, G_2 y G_3 que se diferencian por el nitrógeno contenido en cada uno, el cual es de 30%, 20% y 15% respectivamente. Se desea obtener 600 Kg. de fertilizante con un contenido de nitrógeno del 25%. Además la cantidad del fertilizante del tipo G_3 debe ser el doble del tipo G_2. ¿Cuántos Kg. se deben usar de cada tipo de fertilizante?

Las ecuaciones siguientes representan la información que provee el problema

$$\begin{cases} G_1 + G_2 + G_3 = 600 \\ 0{,}30G_1 + 0{,}20G_2 + 0{,}15G_3 = 0{,}25 \quad 600 \\ G_3 = 2G_2 \end{cases}$$

II.1.-La ecuación matricial

Sea $A \in K^{nxm}$, $X \in K^{mx1}$ y $B \in K^{nx1}$;

La ecuación matricial es : A. X= B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto y por definición de matrices iguales se obtiene la forma escalar del sistema de *n* ecuaciones lineales con *m* incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Notas:

- $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$ denotan las incógnitas del sistemas de ecuaciones lineales de n ecuaciones con m incógnitas.
- Los nxm escalares a_{ij} son los coeficientes de las incógnitas.
- Los escalares b_j se denominan términos independientes del sistema de ecuaciones lineales.
- La matriz A, cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas del sistema, se llama matriz de coeficientes del sistema.

Si los escalares b_j $, \forall\ 1 \leq j \leq n$ son ceros se tiene que el sistema lineal toma el nombre de sistema lineal homogéneo, esto es:
La ecuación matricial es A.X=O
El sistema de ecuaciones lineales toma la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

Observación:
Dado un sistema de ecuaciones lineales de ecuación matricial A.X=B con $B \neq O$ siempre es posible asociar a dicho sistema su correspondiente sistema lineal homogéneo de ecuación matricial A.X=O que recibe el nombre de sistema lineal homogéneo asociado al sistema lineal dado.

<u>II.1.2.-Conjunto Solución</u>

Se denomina **conjunto solución del sistema** de ecuaciones lineales o de la ecuación matricial y se lo denota con S, al conjunto de elementos de K^{mx1} , en símbolos se tiene

S $= \{ \bar{X} \in K^{mx1} \ / \ A.\bar{X} = B\}$

II.2.-Observaciones

- A cada elemento del conjunto solución S, si existen , llamaremos solución del sistema lineal A.X=B

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_m \end{bmatrix}$$ es una solución de la ecuación matricial A.X = B $\Leftrightarrow$ $A.\bar{X}$ =B

- La ecuación matricial A.X=B no tiene solución, o el sistema de ecuaciones lineales es incompatible $\Leftrightarrow$ S=ϕ

- La ecuación matricial A.X=B tiene solución, o el sistema de ecuaciones lineales es compatible $\Leftrightarrow$ S $\neq$ ϕ

Si sucede esto, puede darse que;

a) El sistema lineal es determinado si y solo si el conjunto solución S es unitario, esto es tiene un único elemento.
b) El sistema lineal es indeterminado si y solo si el conjunto solución S tiene mas de un elemento.

- La ecuación matricial A.X=O siempre admite solución y el sistema lineal asociado a dicha ecuación es compatible, esto es S $\neq$ Ǿ

Si sucede esto, puede darse las situaciones a) y b) del item precedente.

- Si se da la situación a) la solución es la trivial, esto es $\bar{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$

II.3.- Operaciones elementales sobre una matriz

Se denominan ***operaciones elementales*** entre ecuaciones (o entre filas o columnas) de una matriz a las siguientes tipos de operaciones;

- **Tipo I:** permutación de dos filas o dos columnas.
  Simbólicamente se expresa: $f_r \leftrightarrow f_i$ (se intercambia la fila *r* con la fila *i*).
- **Tipo II:** multiplicación de una fila o columna por un escalar α no nulo.
  Simbólicamente se expresa: αf_i (el escalar α multiplica la fila *i*).
- **Tipo III:** suma de una fila (o columna) multiplicada por un escalar α no nulo a otra fila (o columna). Simbólicamente se expresa: $f_r + \alpha f_i$ (se suma a la fila *r*, la fila *i* multiplicada por el escalar no nulo α.).

Al aplicar las operaciones elementales a una matriz, obtenemos matrices equivalentes y sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

II.3.1.-Proposición

Si un sistema de ecuaciones lineales se obtiene a partir de otro por operaciones elementales entre sus ecuaciones entonces ambos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes.

Ejemplo: Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 30 \end{cases}$$

En forma matricial y mediante operaciones elementales se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to \frac{1}{2} f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 2f_1]{f_2 \to f_2 - 4f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to -\frac{1}{3} f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 3f_2]{f_1 \to f_1 - 2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema finalmente obtenido es equivalente al sistema original y es de la forma:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Cabe resaltar el hecho de que, en cada paso, se obtuvieron sistemas equivalentes al sistema inicial. Es decir, que cada sistema tiene el mismo conjunto solución que su precedente.

II.4.-Matriz escalón por fila

Una matriz E se llama escalón por fila si todo elemento de E es cero, o si se verifican las siguientes condiciones

a) Si E tiene filas nulas, estas aparecen en la parte inferior de la matriz.
b) El primer elemento no nulo (a partir de la izquierda) de cada fila no nula de E es igual a 1. Dicho número se denomina 1 principal o inicial.
c) Las filas no nulas de E están dispuestas de tal forma que cada una de ellas presenta a la izquierda del 1 principal más ceros que la fila precedente.

Ejemplos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

B, C, D son matrices escalón por filas.

Notas:

- En una matriz escalón por filas, todos los elementos situados debajo del 1 principal de una fila son ceros. La columna que contiene un 1 principal se denomina columna principal.
- En una matriz escalón por filas, sus filas están en "escalera descendente", esto es:
  * El 1 principal de cada fila se encuentra en la esquina izquierda de cada peldaño
  * La altura de cada peldaño es igual a la altura de una fila.
  * Debajo de la escalera todos los elementos son ceros.
- Dada una matriz, no siempre es posible hallar una única matriz escalón por filas, puesto que al cambiar las sucesiones de operaciones elementales sobre las filas de la matriz dada, es posible llegar a diferentes matrices escalón por filas.Las diferentes matrices escalón por filas obtenidas son equivalentes, y cumplen con la relación de equivalencia.
- Dada una matriz, todas sus matrices escalón por fila tienen el mismo número de filas no nulas.

II.5.-Rango de una matriz.

Sea A$\in K^{nxm}$ una matriz, y sea E$\in K^{nxm}$ una de sus matrices escalón por filas. Se define rango de la matriz A, y se denota *rg(A)*, al máximo número de filas no nulas de la matriz escalón por filas E.

Ejemplo

Sea la matriz A=$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, mediante operaciones elementales se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 - 4f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to -\frac{1}{7} f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde se puede notar que el rango de la matriz A es 3, esto es, *rg(*A)=3

II.6.-Matriz escalón reducida por filas

Una matriz R de K^{nxm}, se llama matriz escalón reducida por filas, si verifica las siguientes condiciones:

a) R es una matriz escalón por filas.

b) En las columnas principales de la matriz R, los elementos que están arriba y abajo del 1 principal son ceros.

c) Toda matriz escalón reducida por filas es una matriz escalón por filas, pero no ocurre a la inversa.

d) Toda matriz escalón de K^{nxm} tiene una única matriz escalón reducida por filas.

e) Si R es una matriz escalón reducida por filas de una matriz A, y si E es una matriz escalón por filas de la misma matriz A, las matrices R y E tienen el mismo número de filas no nulas.

f) Podemos definir el rango de una matriz en términos de la matriz escalón reducida por filas, esto es:

Sea A una matriz de K^{nxm}. Sea R la matriz escalón reducida por filas de A. El rango de la matriz A es el máximo número de filas no nulas de la matriz escalón reducida por filas R.

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.7.-Método de Gauss- Jordan, para el tratamiento de rango e inversa de una matriz

El método Gaussiano a través de las operaciones elementales definidas, no solo permite determinar el rango de toda matriz si no también calcular , de ser posible, la inversa de una matriz cuadrada.

➢ <u>Método de Gauss-Jordan para inversa de una matriz cuadrada</u>

Para calcular la inversa de una matriz cuadrada A de orden n se reduce la matriz [A| $\mathbf{I_n}$] a la matriz [$\mathbf{I_n}$| B] llegando desde A a la matriz identidad aplicando las operaciones elementales en la matriz [A| $\mathbf{I_n}$]; luego B es la inversa de A.

Ejemplo

_El ejemplo citado en el ítem anterior muestra el empleo de este método para el cálculo del rango de una matriz.

_Para la determinación de la inversa suponga el siguiente ejemplo.

Sea la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Supongamos que existe la inversa A^{-1}=$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

Y usando el hecho de que $A.A^{-1}=I_n$, efectuamos:

$$A.A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-3z & 2y-3w \\ -4x+5z & -4y+5w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la igualdad de matrices se tiene la igualdad de sus respectivas componentes. Esto puede expresarse en la forma

$$\begin{cases} 2x & & -3z & & =1 \\ & 2y & & -3w & =0 \\ -4x & & +5z & & =0 \\ & -4y & & +5w & =1 \end{cases}$$

Que es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Se observa que hay dos ecuaciones que involucran solamente a x y a z , y las otras dos que involucran a y y w , esto se puede resumir a dos sistemas de ecuaciones de la forma

$$\text{a)}\begin{cases} 2x & -3z & =1 \\ -4x & +5z & =0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \text{b)}\begin{cases} 2y & -3w & =0 \\ -4y & +5w & =1 \end{cases}$$

Reduciendo por filas ambos sistemas resulta

$$\text{a)}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to 2f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \to (-1)f_2]{f_1 \to \frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1 \to \frac{3}{2} f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

de donde se deduce que, *x=-5/2* y *z=-2*

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to 2 f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \to (-1) f_2]{f_1 \to \frac{1}{2} f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{f_1 \to \frac{3}{2} f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

de donde se deduce que, *y=-3/2* y *w=-1*

Luego, la matriz inversa A^{-1} es de la forma $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

II.7.1.-Método para encontrar la solución de un Sistemas de ecuaciones lineales

Sea el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases}$$

Se denomina ***matriz ampliada*** a la matriz formada por la matriz de los coeficientes más el vector columna de los términos independientes y se la denota:

$$A^* = [AB],\ A^* \in K^{n \times (m+1)}$$

$$A^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} & b_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{bmatrix}$$

II.7.2.-Teorema de Rouché-Frobenius

Sea el sistema lineal de ecuación matricial A.X=B, com $A \in K^{mxn}$, $X \in K^{nx1}$ y $B \in K^{mx1}$

Sea $A^* \in K^{mx(n+1)}$ la matriz de coeficientes ampliada con la columna de términos independientes.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución, es que la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada tengan igual rango.

$$\text{A.X=B es compatible} \Leftrightarrow rg(A)=rg(A^*)$$

Demostración

$$AX = B \text{ es compatible } \Leftrightarrow \exists \overline{X} \in K^{nx1} : A.\overline{X} = B \Leftrightarrow \exists \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ . \\ . \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} \in K^{nx1} : (A_1, A_2, ..., A_n). \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ . \\ . \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} = B \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \exists \overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n} \in K^{nx1} : \overline{x_1}A_1 + \overline{x_2}A_2 + ... + \overline{x_n}A_n = B \Leftrightarrow B = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}A_i$ si y solo si B es combinación lineal de las n columnas de la matriz A si y solo si la dimensión del espacio columna de la matriz A es igual a la dimensión del espacio columna de la matriz ampliada, si y solo si *rg*(A)=*rg*(A*).

(**Observación**: esta demostración supone tener conocimientos sobre Álgebra Lineal)

Además, llamando n al número de incógnitas:

- Si $rg(\mathrm{A}) = rg(\mathrm{A}^*) = n \Rightarrow$ ***Sistema compatible determinado*** y tiene una solución unica
- Si $rg(\mathrm{A}) = rg(\mathrm{A}^*) \neq n \Rightarrow$ ***Sistema compatible indeterminado*** y infinitas soluciones.
- Si $rg(\mathrm{A}) \neq rg(\mathrm{A}^*) \Rightarrow$ ***Sistema Incompatible*** y no tiene solución.

Ejemplos

a) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

La matriz ampliada A* asociada al sistema esta dada por $\mathrm{A}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$

Mediante el método de Gauss-Jordan se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to \frac{1}{2} f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 3f_1]{f_2 \to f_2 - 4f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2 \to -\frac{1}{3} f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 + 5f_1]{f_1 \to f_1 - 2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to -f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 \to f_2 - 2f_3]{f_1 \to f_1 + f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

haciendo uso del Teorema de Rouche Frobenius vemos que $rg(\mathrm{A}) = rg(\mathrm{A}^*) = 3$ y que coincide con el número de incógnitas, entonces el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado y la solución única esta dada por $S = \{(4, -2, 3)\}$

c) Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} x & & +10z & =5 \\ 3x & 1y & -4z & =-1 \\ 4x & +y & +6z & =1 \end{cases}$$

La matriz ampliada B* asociada al sistema esta dad por B* = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right)$

Reduciendo por filas el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 4f_1]{f_2 \to f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 1 & -34 & -19 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

haciendo uso del Teorema de Rouche Frobenius vemos que rg(A) = 2 y rg(A*)=3 de donde se puede concluir que el sistema de ecuaciones es Incompatible, eso es, no admite solución.

II.8.-Sistemas lineales homogéneos:

Sea el sistema de ecuaciones A.X = B, donde B es la matriz nula de K^{nx1}, de manera que AX=0. Entonces este sistema de ecuaciones se denomina sistema lineal homogéneo.

El sistema homogéneo siempre tiene solución, puesto que al menos admite la solución trivial , es decir el conjunto solución $S \neq \varnothing$.

El sistema lineal homogéneo siempre es compatible, por lo que puede suceder:

- rg(A)= n $\Rightarrow$ ***Sistema compatible determinado***

- $rg(A) \neq n \Rightarrow$ ***Sistema compatible e indeterminado.***

Ejemplos

Sea el sistema

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & -2x_3 & =0 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & =0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & =0 \end{cases}$$

Reduciendo por filas el sistema, se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 \to f_1+f_2 \\ f_3 \to (-2)f_1+f_3}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \to (-3)f_2+f_1 \\ f_3 \to 10f_2+f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \to (-1)f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II.9.-Reseña Histórica sobre los sistemas de ecuaciones lineales y su resolución

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como *longitud, anchura, área, o volumen* , sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura + longitud = 7 manos

longitud + anchura = 10 manos

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una *mano* y observaban que la solución podía ser: *anchura = 20, longitud = 30* . Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación, sería:

$y + 4x = 28$

$y + x = 10$

restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir, $x = 6$ e $y = 4$.
También resolvían sistemas de ecuaciones, donde alguna de ellas era cuadrática.
Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero uti1izando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas.
Diophante resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal.

Diophante sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada como hemos señalado anteriormente. Sin embargo, unas de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diophante es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos.

Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones.

El libro *El arte matemático* , de autor chino desconocido (siglo III a. de C.), contiene algunos problemas donde se resuelven ecuaciones. En ellos encontramos un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Uno de dichos problemas equivale a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales por dicho método matricial.(Fuente: BOYER, C. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1986- BELL, ET. *Men of Mathematics*. Simon and Schuster, New York, 1937 (En Internet existe una versión en castellano)

II.10.-Reseña histórica sobre los determinantes

Los determinantes hicieron su aparición en las matemáticas más de un siglo antes que las matrices. El término matriz fue creado por James Joseph Sylvester, tratando de dar a entender que era "la madre de los determinantes".

Algunos de los más grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX contribuyeron al desarrollo de las propiedades de los determinantes. La mayoría de los historiadores coinciden en afirmar que la teoría de los determinantes se originó con el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) quien fue con Newton, el co-inventor del cálculo diferencial e integral. Leibniz empleó los determinantes en 1693 con relación a los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. No obstante hay quienes creen que el matemático japonés Seki Kowa hizo lo mismo unos 10 años antes.

Las contribuciones más importantes a la teoría de los determinantes fueron las del matemático francés Agustin-Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy escribió, en 1812 una memoria de 84 páginas que contenía la primera demostración del teorema detAB=detA detB.

Cauchy escribió ampliamente tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Solo Euler contribuyo en mayor medida. Cauchy hizo contribuciones en varias áreas, incluyendo la teoría de las funciones reales y complejas, la teoría de la probabilidad, geometría, teoría de propagación de las ondas y las series infinitas.

A Cauchy se le reconoce el haber establecido nuevos niveles de rigor en las publicaciones matemáticas. Después de Cauchy, fue mucho más difícil publicar escritos basándose en la intuición; se exigió una estricta adhesión a las demostraciones rigurosas.

Hay algunos otros matemáticos que merecen ser mencionados aquí. El desarrollo de un determinante por cofactores fue empleado por primera vez por el matemático francés Pierre de Laplace (1749-1827). Laplace es mejor conocido por la transformación que lleva su nombre que se estudia en los cursos de matemáticas aplicadas.

Un contribuyente principal de la teoría de los determinantes (estando solo Cauchy antes que él) fue el matemático alemán Carl Gustav Jacobi (1804-1851). Fue con él con quien la palabra "determinante" ganó la aceptación definitiva. Lo primero en lo que Jacobi empleó los determinantes fue en las funciones, al establecer la teoría de las funciones de varias variables. Sylvester llamó más tarde jacobiano a éste determinante.(Fuente:Algebra Lineal- Stanley I. Grossman S.-Editorial McGrawwHill)

La matemática ha sido el alfabeto con el cual Dios ha escrito el UNIVERSO.

Galileo Galilei

III Función Determinante

III.1.-La función determinante – Definición – Propiedades

Sea $A \in K^{nxn}$ y se la denota así: $A = (A_1, A_2, ..., A_j, ..., A_n)$

La relación $| \ |$, definida del siguiente modo

$$| \ | : K^{n \times n} \to K$$
$$A \mapsto |A|$$

se llama función determinante de orden n definida sobre el conjunto de las matrices cuadradas de orden n, que toma valores en K y que satisface las siguientes propiedades:

1) $| \ |$ es una función lineal por columnas, es decir:

a) $|A_1, A_2, ..., A_j + A'_j, ..., A_n| = |A_1, A_2, ..., A_j, ..., A_n| + |A_1, A_2, ..., A'_j, ..., A_n| \quad \forall\ 1 \le j \le n$

b) $|A_1, A_2, ..., cA_j, ..., A_n| = c|A_1, A_2, ..., A_j, ..., A_n| \quad \forall\ 1 \le j \le n,\ \forall c \in R$

2.-Si para algún $j \ne k$ es $A_j = A_k$, entonces:

$|A_1, A_2, ..., A_j, ..., A_k, ...A_n| = 0$

3.- Si A es la matriz cuadrada unidad de orden n, su determinante es igual a 1, $|I_n| = 1$

Nota: el número $|A|$ se denomina determinante de (la matriz) A, y el número n designa el orden del determinante.

Por lo expuesto la función determinante es por definición:

1.- n-lineal

2.- alternada

3.- $|I_n| = |I| = 1$

III.1.1.-Proposiciones

Proposición I

Si para cualquier entero $k \,/\, 1 \le k \le n$ una columna es combinación lineal de otras dos; esto es $A_k = c_1 A_k^{'} + c_2 A_k^{''}$ con c_1 y c_2 $\in K$, entonces vale la siguiente igualdad:

$$\left|A_1, A_2, ..., c_1 A_k^{'} + c_2 A_k^{''}, ..., A_n\right| = c_1\left|A_1, A_2, ..., A_k^{'}, ..., A_n\right| + c_2\left|A_1, A_2, ..., A_k^{''}, ..., A_n\right|$$

Prueba

Por Ax 1.a) se tiene que

$\left|A_1, A_2, ..., c_1 A_k^{'} + c_2 A_k^{''}, ..., A_n\right| = \left|A_1, A_2, ..., c_1 A_k^{'}, ..., A_n\right| + \left|A_1, A_2, ..., c_2 A_k^{''}, ..., A_n\right|$ y por Ax 1.b)

$$= c_1\left|A_1, A_2, ..., A_k^{'}, ..., A_n\right| + c_2\left|A_1, A_2, ..., A_k^{''}, ..., A_n\right|$$

Corolario

Si los elementos de una columna cualesquiera de A $\in K^{nxn}$ son todos nulos, entonces el determinante de la matriz es cero, esto es |A|=0

Demostración

Si se supone que la columna k-ésima $A_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $A_k = 0\,\overline{A_k}$ donde $\overline{A_k}$ es cualquier columna (de n-componentes), entonces:

$$\left|A_1, ..., A_k, ..., A_n\right| = \left|A_1, ...,0.\overline{A_k}, .., A_n\right| = 0\left|A_1, ..., \overline{A_k}, ..., A^n\right| = 0$$

Proposición II

Si se intercambian dos columnas cualesquiera de una matriz A $\in K^{nxn}$, el determinante de la nueva matriz A' $\in K^{nxn}$ así obtenida es el opuesto del determinante de la matriz A.

Demostración

Sean entonces $A = (A_1, ..., A_i, ..., A_k, ..., A_n)$ y $A' = (A_1, ..., A_k, ..., A_i, ..., A_n)$

Se considera que las dos columnas son adyacentes, esto es, k= i+1 , entonces considerando la matriz $A'' = (A_1, ..., A_i + A_{i+1}, A_{i+i+1}, ..., A^n)$ se tiene $\left|A^{''}\right| = 0$ por la Propiedad 2 de la función determinante , pero por la linealidad de la función determinante se tiene:

$0 = \left|A^{''}\right| =$

$\left|A_1,....,A_i,A_i,.....,A_n\right| + \left|A_1,....,A_i,A_{i+1},....,A_n\right| + \left|A_1,....,A_{i+1},A_i,....,A_n\right| + \left|A_1,....,A_{i+1},A_{i+1},....A\ \right|$

El primero y el último sumando son ceros por propiedad 1.(b) de la definición de la función determinante, porlo tanto

0= $|A| + |A'| \Rightarrow |A| = -|A'|$

Corolario

Si a una columna cualesquiera A_i de la matriz $A \in K^{nxn}$ se le suma un múltiplo escalar λ por otra columna cualquiera A_k $(i \neq k)$, entonces el determinante no varía, esto es:

$(i \neq k)\ \left|A_1,...,A_i,...,A_k,....,A_n\right| = \left|A_1,...,A_i + \lambda A_k,...,A_k,....,A_n\right|$

Demostración

$$\left|A_1,...,A_i + \lambda A_k,....,A_n\right| = \left|A_1,...,A_i,...,A_k,....,A_n\right| + \lambda\left|A_1,...,A_k,...,A_k,...,A_n\right| =$$

$$= \left|A_1,...,A_i,...,A_k,....,A_n\right| + \lambda 0 = \left|A_1,...,A_i,...,A_k,....,A_n\right|$$

III.1.2.-La función determinante de segundo orden

$$|\ | : K^{2x2} \rightarrow K$$

$$A \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Proposición

1.a) $\left|A_1 + A_1^{'},.A_2\right| = \left|A_1,.A_2\right| + \left|A_1^{'},.A_2\right|$

1.b) $\left|cA_1,.A_2\right| = c\ \left|A_1,.A_2\right|$

2) $\left|A_1,.A_2\right|$=0 si A_1=A_2

3) $\left|I_2\right| = 1$

Prueba

1.a) $\left|A_1 + A_1^{'},.A_2\right| = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11}^{'} & a_{12} \\ a_{21} + a_{21}^{'} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(a_{11} + a_{11}^{'}\right)a_{22} - \left(a_{21} + a_{21}^{'}\right)a_{12} =$

$= a_{11}a_{22} + a_{11}^{'}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{21}^{'}a_{12} = \left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right) + \left(a_{11}^{'}a_{22} - a_{21}^{'}a_{12}\right)$

$= \left|A_1,.A_2\right| + \left|A_1^{'},.A_2\right|$

1.b) $\left|cA_1,.A_2\right| = \begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(ca_{11}a_{22} - ca_{21}a_{12}\right) = c\,\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right) = c\,\left|A_1,.A_2\right|$

3) si $A_1 = A_2$ $\left|A_1,.A_2\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = \left(a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11}\right) = 0$

4) $\left|I_2\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(1.1 - 0.0\right) = 1$

<u>III.1.3.-La función determinante de tercer orden</u>

Si se considera las matrices de orden (3x3), se puede probar que la función determinante

$| \; | : K^{3x3} \to K$

$\quad A \mapsto |A|$

Verifican las propiedades de la función determinante de dimensión 2.

Sea A $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz A de orden (3x3) , al aplicar determinante, se tiene

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Esta manera de calcular los determinantes de orden 3x3 se conoce con el nombre de Regla de Sarros

Entre las aplicaciones interesantes del determinante de matrices 3x3 es el cálculo de volúmenes de paralelepípedos y producto vectorial con sus características.

III.2.-Cofactor o complemento algebraico

Sea A $\in K^{nxn}$. El cofactor *ij* de un elemento cualquiera de la matriz *A*, es un elemento que se obtiene mediante la expresión $(-1)^{i+j}\left|A(i/j)\right|_{n-1}$. Esto es, el cofactor de a_{ij}, denotado por A_{ij} es tal que

$A_{ij} \overset{def}{=} (-1)^{i+j}\left|A(i/j)\right|_{n-1}$ donde $\left|A(i/j)\right|_{n-1}$ denota el determinante de la matriz que resulta de eliminar de la matriz A la fila i y columna j.

Ejemplo

Sea la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Los cofactores de cada uno de sus elementos son:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -(-1+20) = -19$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 15 = 15 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = -(0+10) = -10$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5$$

III.2.1.-Matriz de cofactores

Sea A $\in K^{nxn}$ de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Llamamos matriz de cofactores a la matriz que resulta de sustituir en la matriz A cada elemento por su cofactor. Esto es

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Para la matriz A del ejemplo anterior

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de cofactores es $\begin{pmatrix} 3 & -19 & 15 \\ -2 & 1 & -10 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

III.2.2.-Adjunta de una matriz

Sea A $\in K^{nxn}$ dada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Llamamos adjunta de la matriz A, y denotamos por adj (A), a la transpuesta de la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su cofactor. Esto es

$$adj(A)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1j} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{n2} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Para la siguiente matriz A

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz *adj (A)* = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -19 & 1 & -4 \\ 15 & -10 & 5 \end{pmatrix}$

Proposición

Cualquiera que sea A $\in K^{nxn}$ se verifica que

A. *adj(A)*= *adj(A)*.A = $|A| I$

III.3.-Matrices inversibles o no singulares

Teorema

Sea A $\in K^{nxn}$. A es inversible si y solo si $|A| \neq 0$. Si $|A| \neq 0$, entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} adjA$

A $\in K^{nxn}$. A es inversible $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

Si $|A| \neq 0$, entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} adjA$

Prueba

i) A $\in K^{nxn}$ es inversible $\Rightarrow |A| \neq 0$

Por hipótesis A es inversible $\Rightarrow \exists B \in K^{nxn} \,/\, A.B = B.A = I$

luego $|A.B| = |B.A| = |I_n|$

por propiedad de determinantes

$|A|.|B| = |B|.|A| = 1$ de donde se deduce que $|A| \neq 0$ por ser el producto $|A|.|B|$ no nulo.

ii) $|A| \neq 0 \Rightarrow$ A $\in K^{nxn}$ es inversible

Por hipótesis $|A| \neq 0$ y de la proposición anterior $A.\ adj\ A =\ adj\ A.A = |A|\,I$

se tiene que $\dfrac{A.adj(A)}{|A|} = A\left(\dfrac{adj(A)}{|A|}\right) = \left(\dfrac{adj(A)}{|A|}\right)A = \dfrac{|A|.I_n}{|A|} = I_n$. entonces $\exists B \in K^{nxn}$ y es precisamente

$$B = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|}adj(A) = A^{-1}$$

A partir de este teorema es posible resolver sistema de ecuaciones lineales de la forma

-

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

cuya ecuación matricial responde a la forma AX=B con $A \in K^{nxn}$, $X \in K^{nx1}$ y $B \in K^{nx1}$ siempre que A sea una matriz no singular o inversible ($|A| \neq 0$)

Nuestro problema radica entonces en determinar el conjunto solución $S = \{X \in K^{nx1} / AX = B\}$

Para ello utilizamos el resultado del siguiente teorema

III.3.1.-Teorema de Cramer

Sean A $\in K^{nxn}$ **, X** $\in K^{nx1}$ **y B** $\in K^{nx1}$

Si A es una matriz inversible, el sistema lineal AX=B admite solución única.

Si A es inversible $\Rightarrow$ AX=B admite solución única.

Prueba

Por hipótesis A es inversible, esto significa que existe una matriz A^{-1}.

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación AX=B por la inversa resulta:

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ asociando tenemos

$(A^{-1}A)\,X = A^{-1}B$ puesto que $A^{-1}A = I_n$

resulta finalmente $X = A^{-1}B$

Nota: este resultado nos muestra que:

- el sistema lineal AX=B admite única solución debido a la existencia y unicidad de la inversa de la matriz A.
- Todo sistema cuadrado en el que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo se denomina crameriano.
- A es inversible , si y solo si, $|A| \neq 0$
- Si B=0 y A es inversible, entonces el sistema AX=0 admite solución única trivial.

Ejemplo

Determinar si el siguiente sistema es o no crameriano. En caso afirmativo obtener la solución del sistema.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 8x_3 = 17 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ entonces } \exists A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Luego la solución del sistema esta dado por $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

y la solución es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

o bien de la forma $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = (1,-1,2) \right\}$

III.3.2.-Regla de Cramer

Sea AX=B un sistema lineal crameriano. La solución única del sistema esta dada por $X = A^{-1}B$

Prueba

La solución del sistema es $X = A^{-1}B$

Pero $A^{-1}B = \left(\frac{1}{|A|} adj(A)\right)B$

luego $X = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1j} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{n2} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_j \\ .. \\ b_n \end{bmatrix}$

de lo que se resulta que, $adj(A)B$ es una matriz de orden nx1

$$X = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + ... + A_{n1}b_n \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n1}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + ... + A_{nj}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

Por producto de escalar por una matriz, y por igualdad de matrices, se tiene que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_j \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}_{\in K^{nx1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{|A|}(A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + ... + A_{n1}b_n) \\ \frac{1}{|A|}(A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n1}b_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{|A|}(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + ... + A_{nj}b_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{|A|}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n) \end{bmatrix}}_{\in K^{nx1}}$$

Por lo tanto $\forall j = 1,2,...,n$ se tiene que

$x_j = \frac{1}{|A|}\left(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + ... + A_{nj}b_n\right) \quad 1 \le j \le n$

La expresión entre paréntesis es el desarrollo del determinante de la matriz-

$$
\begin{array}{c}
A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & b_i & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
\downarrow \\
\textit{columna } j
\end{array}
$$

Si A es una matriz inversible de orden n, el sistema de ecuaciones lineales AX=B es compatible determinado y sus soluciones se calculan mediante la formula

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \quad \forall j = 1,2,....,n$$

Donde A_j es la matriz que resulta de sustituir en la matriz A la columna j por el vector columna B de términos independientes.

<u>Ejemplo</u>

Para el ejemplo anterior presentado

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =5 \\ 2x_1 & +5x_2 & +3x_3 & =3 \\ x_1 & & +8x_3 & =17 \end{cases}$$

Se sabe que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1$

Luego, la solución única del sistema esta dado por

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 17 & 0 & 8 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 17 & 8 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1 \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 17 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2$$

y la solución es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

III.4.-Aplicaciones de la función determinante a la Geometría plana y a la Geometría Analítica plana.

III.4.1.-Área del paralelogramo

Una fila (a, b) de una matriz cuadrada de orden 2 representa un vector con origen en el punto de coordenadas (0, 0) y extremo en el punto de coordenadas (a, b).

Una matriz cuadrada de orden 2, de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ define dos vectores fila y estos determinan entres si un paralelogramo. El área del paralelogramo es el determinante de la matriz A y se designa por $|A|$.

Ejemplo

Sea la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

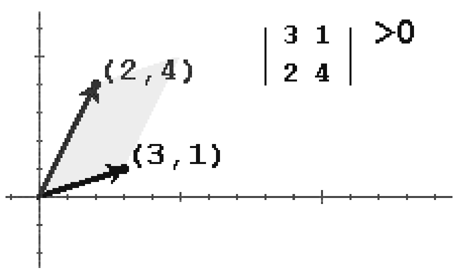


Figura 1

El área del paralelogramo determinada por los vectores filas es $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3.4 - 2.1 = 10$

Al permutar dos filas de un determinante este cambia de signo pero su valor absoluto no varía. Como puede verse en la figura 2, el paralelogramo no varia, solo cambia su orientación.

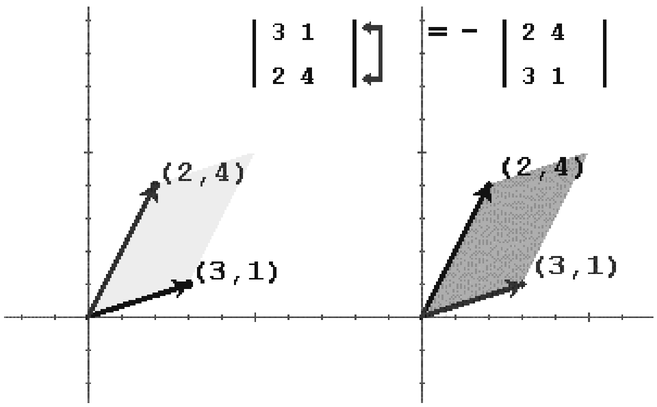


Figura 2

Nota: Observamos que el determinante de la matriz es cero cuando los dos vectores fila están alineados, es decir, cuando entre ellos no hay área. Figura 3

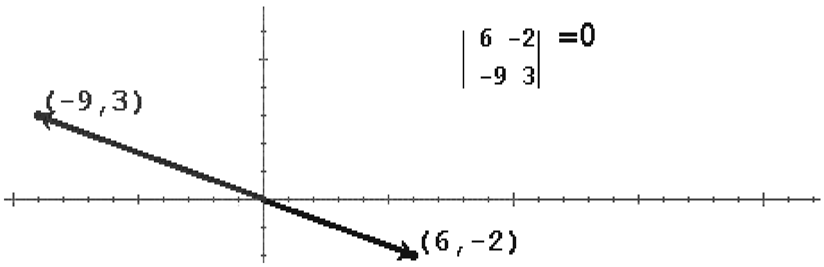


Figura 3

III.4.1.1.-Observación

El determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta.

Ejemplo

Sea la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, la transpuesta de esta matriz es $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, que

representan geométricamente los siguientes paralelogramos (figura 4)

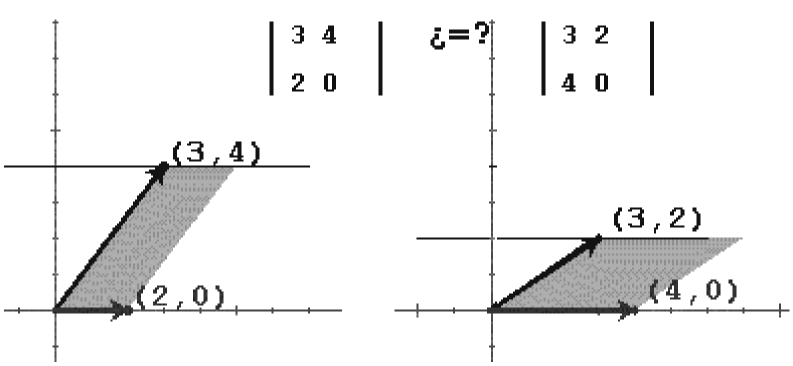


Figura 4

El área de cada paralelogramo esta dado por el del determinante de la matriz. Esto es

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3.0 - 2.4 = -8 \qquad |A^t| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 3.0 - 4.2 = -8$$

Puesto que el área no es un valor negativo, dicha área es el valor positivo del determinante.

III.4.2.-Volumen del paralelepípedo

En R^3 consideremos el paralelepípedo generado por los tres vectores:

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ $w = (w_1, w_2, w_3)$

El volumen de dicho paralelepípedo es el valor absoluto del determinante cuyas filas son los vectores *u, v* y *w.*

$$V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

<u>Ejemplos</u>

1) Sean los vectores $u = (2,0,0)$, $v = (0,3,0)$, $w = (0,0,5)$, entonces el volumen del paralelepípedo es

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30$$

2) Dados los vectores $u = (1,4,2)$, $v = (3,-2,2)$, $w = (-2,5,0)$ el volumen del paralelepípedo es

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \text{-4}$$

III.5.-Modelos Matriciales

Observación

Para el estudio de los modelos propuestos el alumno deberá remitirse al libro "Aplicaciones de Algebra Lineal" de Chris Rorres.Howard Antón.
Editorial Limusa

Ecuaciones de curvas y superficies que pasan por puntos específicos

1.- Se desarrolla una técnica para utilizar los determinantes en la obtención de las ecuaciones de rectas, circunferencias y secciones cónicas que pasan por puntos específicos del plano. Este procedimiento se tulipa también cuando se quieren obtener las ecuaciones de planos y esferas que pasan por puntos fijos del espacio tridimensional.
Conceptos Previos fundamentales: Sistemas lineales- Determinantes- Geometría Analítica.

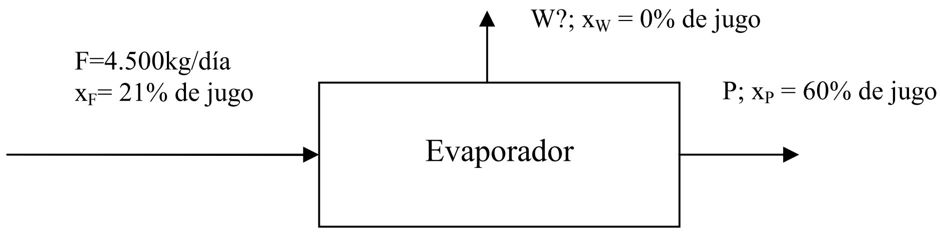
Cadenas de Markov

2.- Se describe un modelo general para un sistema de cambio de estado y se aplica a problemas concretos.
Conceptos Previos fundamentales: Sistemas lineales- Matrices- Comprensión intuitiva de los Límites.

III.6.-Problemas resueltos de Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

1)En un proceso de elaboración de jugos de fruta se emplea un evaporador del cual recibe una alimentación de 4.500kg por día de jugo con 21% de concentración. El producto final se debe concentrar hasta un 60%. Calcule la cantidad de agua evaporada.

1) w = ?



Datos:

F: alimentación
P: producto
W: cantidad de agua
x: fracciones

$$\Rightarrow \begin{cases} F = W + P \\ Fx_F = Wx_W + Px_P \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4500 \\ 0 & 0.6 & 4500(0.21) \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4500 \\ 0 & 0.6 & 945 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 2.925 kg/día = W$$
$$y = 1.575 kg/día = P$$

2) Se tienen dos tipos de alimentos para perros uno de 50 \$/kg y el otro de 65\$/kg. ¿Cuántos Kg. de cada alimentos se deben mezclar paras obtener 1.000 Kg a 54 \$/Kg?

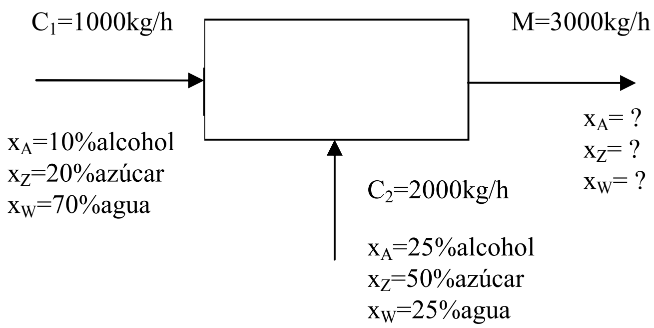
$x_{A=}$ 50 \$/kg donde: x: costo
$x_{B=}$ 65 \$/kg A, B : kg de alimento
M: kg de mezcla

A=? [kg] M = 1000 kg
B=? [kg] x_M = 54\$/kg

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = M \\ Ax_A + Bx_B = Mx_M \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1000 \\ 50 & 65 & 1000(54) \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1000 \\ 50 & 65 & 54000 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow x = A = 733.3kg \\ \quad y = B = 266.7kg \end{array}$$

3) Una corriente de 1.000 Kg/hs que contiene 10% de alcohol, 20% de azúcar y resto de agua, se mezcla con 200kg/hs de una corriente con 25 % de alcohol, 50% de azúcar y el resto agua. Determinar la composición de la mezcla resultante.



donde:

C_1: corriente 1	x_A: concentración de alcohol
C_2: corriente 2	x_Z: concentración de azúcar
M: mezcla	x_W: concentración de agua

x_{AM}, x_{ZM} y x_{WM} son las concentraciones en la mezcla M, y

$$x_{AM} + x_{ZM} + x_{WM} = 1 \qquad (4)$$

BC (alcohol)

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_1 + C_2 = M & (1) \\ C_1 x_A + C_2 x_A = M x_{AM} & (2) \\ C_1 x_Z + C_2 x_Z = M x_{ZM} & (3) \end{array} \right\}$$

El problema se resuelve por una simple sustitución:

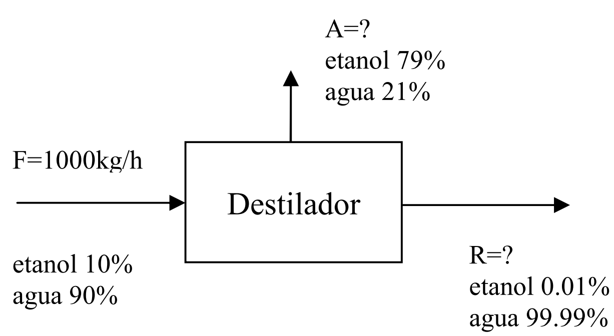
de (2): $x_{AM} = \dfrac{C_1 x_A + C_2 x_A}{M}$

$$x_{AM} = \frac{1000(0,1) + 2000(0,25)}{3000} = 0,2$$

de (3): $x_{ZM} = \dfrac{C_1 x_Z + C_2 x_Z}{M} = \dfrac{1000(0,2) + 2000(0,5)}{3000} = 0,4$

de (4): $x_{WM} = 1 - x_{AM} - x_{ZM} = 1 - 0,2 - 0,4 = 0,4$

4) Se trata de concentrar una disolución de alcohol en un destilado. Entra 1.000kg/hs a 25ºC con una concentración de etanol de 10%. Por la parte superior sale alcohol con 79% de etanol y por la parte inferior sale un residuo con mucha agua y 0,01% de etanol. Determinar los flujos de la corriente.



donde:
F: alimentación
A: alcohol
R: residuo
x_E: concentración de etanol

$$\begin{cases} F = A + R & (1) \\ Fx_E = Ax_E + Rx_E & (2) \end{cases}$$

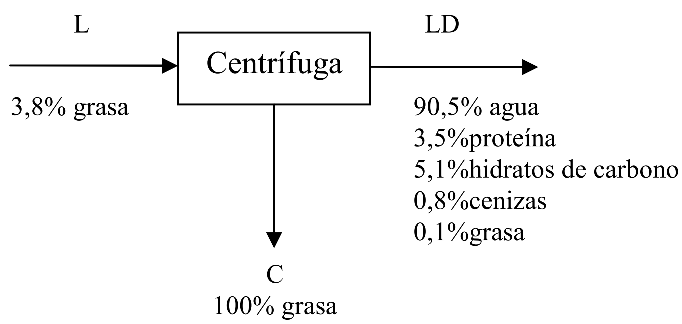
$$\left| \begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1000 \\ 0,79 & 0,0001 & 100 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow x = A = 126{,}5kg/h$$
$$y = R = 873{,}5kg/h$$

5) La leche desnatada que se obtiene de eliminar grasa de una leche entera con 3,8% de grasa contiene; 90,5 de agua, 3,5 % de proteína, 5,1 % de hidratos de carbono, 0,8 de cenizas y 0,1 % de grasas. Calcular la cantidad de crema y de leche descremada suponiendo que:

a) Se obtiene crema al 100%

b) Que la crema obtenida contiene 65% de grasa.



donde:
L: leche entera
LD: leche descremada
C: crema
x: fracción molar

Suponiendo L = 100kg/h

a) $\begin{cases} L = C + LD \\ Lx_L = Cx_C + LDx_{LD} \end{cases}$ $\quad\left|\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 100 \\ 1 & 0{,}001 & 3{,}8 \end{array}\right|$

$$\Rightarrow x = C = 3{,}7kg/h$$
$$y = LD = 96{,}3kg/h$$

b) $\begin{cases} L = C + LD \\ Lx_L = Cx_C + LDx_{LD} \end{cases}$ $\quad\left|\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 100 \\ 0{,}65 & 0{,}001 & 3{,}8 \end{array}\right|$

$$\Rightarrow x = C = 5{,}7kg/h$$
$$y = LD = 94{,}3kg/h$$

6) En una fabrica de aceite de soja de proceso continuo, la semilla que ingresa contiene 1,5 % de materias extrañas, 14% de humedad y 19% de aceite. El sistema de extracción tiene capacidad para procesar 300 ton/día de soja limpia con 11% de humedad.

La semilla es sometida a una operación de limpieza, donde se elimina la totalidad de las impurezas, pero además pierde un 7%.[2]

[2] Estos problemas abiertos fueron presentados por el Ayudante Estudiantil Sr.Hernán Cifarelli actualmente egresado como Ingeniero en Industrias Alimentarias de la Facultad de A.y A- de la UNSE para la cátedra de Ingeniería en Alimentos en el año 2008

III.7.-Resolución de ejercicios con soporte informático.

III.7.1.-Guía de trabajo practico con SCIENTIFIC WORKPLACE. Introducción

SCIENTIFIC WORKPLACE es un procesador de textos que tiene incorporado un procesador de textos llamado MAPLE, el cual permite agregar en el texto, símbolos matemáticos y efectuar operaciones.

En el mismo se permite plantear y resolver ejercicios mientras se confecciona apuntes o diferentes trabajos con mucha facilidad.

El **scientific workplace** tiene dos modos de trabajo, el modo matemático y el modo texto. Se puede intercambiar entre ellos mediante la combinación de la teclas **Ctrl+e** (texto) **Ctrl+m** (matemático) o bien haciendo uso de la barra de herramientas en donde veremos que aparecerá una T (texto) y haciendo clic sobre ella cambiara a una M (matemático).

En el modo de textos se cuenta con varias opciones de edición de textos , entrando en la barra de herramientas a la opción **View→Toolbars** aparecerán las mismas mediante las cuales se puede formatear el texto elaborado.

Al trabajar el modo matemático, también se dispone de un comando para mantener el formato del trabajo, este está también en la opción **View→Toolbars.** Mientras que en la opción MAPLE esta el paquete completo de operaciones matemáticas que es posible realizar. Con el comando **Evalute** se puede encontrar la solución de los mismos o bien presionando el comando **Ctrl+e** desde nuestro teclado.

Operadores

Para trabajar con las operaciones de suma (+), resta (-), producto (*) haremos uso de los operadores usuales de nuestro teclado, y si no, el software cuenta en su barra de herramienta con los símbolos antes mencionados.

Variables

Para poder identificar una variable a la hora de poder realizar una operación, esta debe estar siempre escrita en modo matemático, caso contario no será identificada como tal. Se pueden usar las teclas mayúsculas o minúsculas indistintamente.

III.7.2.-Matrices.

Las matrices en Scientific WorkPlace se trabajan de igual forma a como las trabajamos en nuestro cuadernos, es decir, en un tabla encerrada entre paréntesis, para ello contamos con reglas rapidas en la barra de herramientas. Veremos a continuacion todas las operaciones que podemos realizar entre matrices.

Modo de ingreso de una matriz

Para ingresar una matriz, utilizaremos la barra de herramienta, en esta aparecen los "paréntesis" () y en la barra **math object** esta la opción "**matrix**", la cual nos abre un menú especial para crear la matriz ingresando la cantidad de filas y columnas necesarias.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 \\ -1/2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

III.7.2.1.-Operaciones con Matrices

Suma: Para sumar matrices se escribe las matrices con el operador correspondiente a la suma (+) y luego presionando el comando **ctrl+e** se obtiene el resultado.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1/2 & 2 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -5/2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Resta: Para restar matrices se escribe las matrices con el operador correspondiente a la resta (-) y luego presionando el comando **ctrl+e** se obtiene el resultado.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -6 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicación: Para sumar matrices se escribe las matrices con el operador correspondiente al producto (*) y luego presionando el comando **ctrl+e** se obtiene el resultado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz Transpuesta.

Para encontrar la transpuesta de una matriz utilizaremos en el menú **maple**$\rightarrow$**matrices**$\rightarrow$ **transpose**.

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, transpose $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Rango de una Matriz.

Para encontrar el rango de una matriz utilizaremos el menú **maple**$\rightarrow$ **matrices**$\rightarrow$ **rank**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3/5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$, rank: Rg(A)=2

Matriz Inversa

Para encontrar la inversa de una matriz utilizaremos el menú **maple**$\rightarrow$ **matrices**$\rightarrow$ **inverse**

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, inverse: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/35 & -2/35 & -8/35 \\ 19/35 & -1/35 & 4/35 \\ -3/7 & 2/7 & -1/7 \end{pmatrix}$

Adjunta de una Matriz

Para encontrar la adjunta de una matriz utilizaremos el menú **maple**$\rightarrow$ **matrices** $\rightarrow$ **adjugate**

$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1/5 \\ -5 & 2 & 30 \\ 1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$**,** adjugate Adj (A) = $\begin{pmatrix} -90 & 379/5 & -752/5 \\ 105 & 74/5 & -31 \\ -22 & -9 & -23 \end{pmatrix}$

Traza de una Matriz

Para encontrar la traza de una matriz utilizaremos el menú **maple$\rightarrow$ matrices$\rightarrow$ trace**

A=$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1/5 \\ -5 & 2 & 30 \\ 1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$**,** trace: Trac(A) = 18

III.7.3.- La Función Determinante

III.7.3.1.- Aplicaciones de la Función Determinante

Para encontrar el determinante de una matriz utilizaremos el menú **maple$\rightarrow$ matrices$\rightarrow$ determinant**

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**,** determinant: det(A) = -35

III.7.4.-Sistemas de Ecuaciones Lineales

Podremos trabajar en este programa a los sistemas de ecuaciones lineales de dos maneras. La primera es trabajarlos en forma matricial y calcular su tipo de solución mediante el análisis de los rangos y luego haremos la reducción de la matriz ampliada. Otra manera es ingresando las ecuaciones de la manera habitual y buscar la solución de las mismas.

III.7.4.1.-Forma Matricial de un Sistema de Ecuaciones Lineales

En esta forma, trabajaremos a los sistemas de ecuaciones expresándolos con su matriz asociada, el vector de incógnitas y el vector de términos independientes; es decir utilizaremos una expresión de la forma:

A*X=B

Ejemplo:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & =2 \\ -x & +y & -z & =3 \\ x & -4y & +2z & =0 \end{cases}$$

Lo descomponemos matricialmente de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y sea $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Para encontrar la solución del sistema haciendo uso de la matriz ampliada, ejecutaremos el comando **Maple$\rightarrow$matrices $\rightarrow$ reduced row echelom form**, de esta forma veremos como se aplica Gauss Jordan a la matriz ampliada, luego obtendremos el rango de la matriz el cual nos permitirá decidir sobre la compatibilidad del sistema y además obtendremos la solución del mismo.

$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$**,** row echelon form: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -27/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 37/4 \end{pmatrix}$

de la cual podemos deducir que la solucion es: $X = \begin{pmatrix} -27/2 \\ -5/4 \\ 37/4 \end{pmatrix}$

<u>III.7.4.2.- Forma Normal del Sistema de Ecuaciones Lineales</u>

En esta forma de trabajo, ingresaremos el sistema de ecuaciones lineales de la manera en que habitualmente lo vemos y lo trabajamos de la siguiente manera:

1º- Se carga el sistema de ecuaciones en una matriz de orden 3x1 y se coloca una ecuacion por fila; es decir:

$$\begin{array}{l} 2x - 3y + 3z = 2 \\ -x + y - z = 3 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{array}$$

2º- Ejecutaremos el comando **Maple** $\rightarrow$**solve** $\rightarrow$**exact**, como resultado obtendremos información sobre la compatibilidad del sistema, en caso de ser compatible nos darà las soluciones del mismo.

Solution is: $\left\{ X = -\frac{17}{2}, y = \frac{5}{4}, z = \frac{27}{4} \right\}$

IV.9.--Ejercicios de matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes[3]

IV.9.1- Ejercicios de matrices

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Calcular si es posible:

a) $A+B$ b) AC c) CB y C^tB d) $(2A+B)C$

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Calcular si es posible:

a) ABC b) $C^t\left(\frac{1}{2}B-A\right)$ c) A^2, B^2 y C^2

3. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 3\\ 0 & 9 & 5\\ -6 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcular AB y BA ¿coinciden los resultados?

b) Calcular $(A+B)^2$ y $A^2+2AB+B^2$ ¿los resultados son iguales?

c) Calcular A^2-B^2 y $(A+B)(A-B)$ ¿coinciden ambos resultados?

4. Mediante operaciones elementales transformar la matriz A en una matriz escalón equivalente y calcular el rango de A.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 10 & -11\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\\ 5 & -2\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 1 & 4\\ 6 & -7 & -2 & -5\\ 4 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

[3] Esta propuesta de ejercicios fueron presentados por el Ayudante Estudiantil Sr.Hernán Cifarelli actualmente egresado como Ingeniero en Industrias Alimentarias de la Facultad de A.y A- de la UNSE para la cátedra de Ingeniería en Alimentos en el año 2008

IV.9.1.1.- Resolución

1) a)

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+0 & -1+1\\ 3+4 & 2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 7 & 0\end{bmatrix}$$

b)

$$AC=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.1+(-1).2 & 2.3+(-1).(-1) & 2.5+(-1).1\\ 3.1+2.2 & 3.3+2.(-1) & 3.5+2.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 7 & 9\\ 7 & 7 & 17\end{bmatrix}$$

c) El producto de CB no se puede efectuar porque el número de columnas de C y el número de filas de B no coinciden.

En cambio, el producto C^tB si que se puede realizar porque el número de columnas de C^t y el número de filas de B es el mismo.

En primer lugar se calcula la matriz transpuesta de C intercambiando sus filas y sus columnas:

$$C^t=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

$$Asi,\quad C^tB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.0+2.4 & 1.1+2.(-2)\\ 3.0+(-1).4 & 3.1+(-1).(-2)\\ 5.0+1.4 & 5.1+1.(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -3\\ -4 & 5\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

d) Para calcular (2A+B).C se realiza en primer lugar la operación del paréntesis:

$$2A+B=\begin{bmatrix}2.2 & 2.(-1)\\ 2.3 & 2.2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+0 & -2+1\\ 6+4 & 4-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 10 & 2\end{bmatrix}$$

$$Asi,\quad (2A+B).C=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 10 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.1+(-1).2 & 4.3+(-1).(-1) & 4.5+(-1).1\\ 10.1+2.2 & 10.3+2.(-1) & 10.5+2.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 13 & 19\\ 14 & 28 & 52\end{bmatrix}$$

2)

a) Para calcular ABC, se calcula primero el producto de AB y el resultado se multiplica a la derecha por la matriz C.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0+(-1).4 & 2.1+(-1).(-2) \\ 3.0+2.4 & 3.1+2.(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Asi, \quad (AB).C = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4).1+4.2 & (-4).3+4(-1) & (-4).5+4.1 \\ 8.1+(-1).2 & 8.3+(-1).(-1) & 8.5+(-1).1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -16 & -16 \\ 6 & 25 & 39 \end{bmatrix}$$

Por la propiedad asociativa del producto de matrices, el resultado seria el mismo si primero se calculase BC y el resultado se multiplicara a la izquierda por A.

b) En primer lugar se calcula la matriz transpuesta de C intercambiando sus filas y columnas:

$$C^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación se calcula:

$$\frac{1}{2}.B - A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}.0 & \frac{1}{2}.1 \\ \frac{1}{2}.4 & \frac{1}{2}.(-2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2 & \frac{1}{2}-(-1) \\ 2-3 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Asi, \quad C^t\left[\frac{1}{2}B - A\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-2)+2.(-1) & 1.\frac{3}{2}+2.(-3) \\ 3.(-2)+(-1).(-1) & 3.\frac{3}{2}+(-1).(-3) \\ 5.(-2)+1.(-1) & 5.\frac{3}{2}+1.(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -\frac{9}{2} \\ -5 & \frac{15}{2} \\ -11 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

c)

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2+(-1).3 & 2.(-1)+(-1).2 \\ 3.2+2.3 & 3.(-1)+2.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B.B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0+1.4 & 0.1+1.(-2) \\ 4.0+(-2).4 & 4.1+(-2).(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}$$

No se puede calcular $C^2 = C.C$, ya que C no es una matriz cuadrada.

3)

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+6.2+3.3 & 2.1+6.(-4)+3.5 & 2.1+6.2+3.7 \\ 0.1+9.2+5.3 & 0.1+9.(-4)+5.5 & 0.1+9.2+5.7 \\ (-6).1+2.2+1.3 & (-6).1+2.(-4)+1.5 & (-6).1+2.2+1.7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & -7 & 35 \\ 33 & -11 & 53 \\ 1 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

a)

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+1.0+1.(-6) & 1.6+1.9+1.2 & 1.3+1.5+1.1 \\ 2.2+(-4).0+2.(-6) & 2.6+(-4).9+2.2 & 2.3+(-4).5+2.1 \\ 3.2+5.0+7.(-6) & 3.6+5.9+7.2 & 3.3+5.5+7.1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 17 & 9 \\ -8 & -20 & -12 \\ -36 & 77 & 41 \end{bmatrix}$$

No coinciden los resultas, es decir, $A.B \neq B.A$ lo que significa que el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa.

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 6+1 & 3+1 \\ 0+2 & 9+(-4) & 5+2 \\ -6+3 & 2+5 & 1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

b)

$$(A+B)^2 = (A+B).(A+B) = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.3+7.2+4.(-3) & 3.7+7.5+4.7 & 3.4+7.7+4.8 \\ 2.3+5.2+7.(-3) & 2.7+5.5+7.7 & 2.4+5.7+7.8 \\ (-3).3+7.2+8.(-3) & (-3).7+7.5+8.7 & (-3).4+7.7+8.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 84 & 93 \\ -5 & 88 & 99 \\ -19 & 70 & 101 \end{bmatrix}$$

A continuación se calcula $A^2+2AB+B^2$:

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2+6.0+3.(-6) & 2.6+6.9+3.2 & 2.3+6.5+3.1 \\ 0.2+9.0+5.(-6) & 0.6+9.9+5.2 & 0.3+9.5+5.1 \\ (-6).2+2.0+1.(-6) & (-6).6+2.9+1.2 & (-6).(-6)+2.5+1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{bmatrix}$$

La matriz AB se ha calculado en el apartado a), así:

$$2AB = 2\begin{bmatrix} 23 & -7 & 35 \\ 33 & -11 & 53 \\ 1 & -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.23 & 2.(-7) & 2.35 \\ 2.33 & 2.(-11) & 2.53 \\ 2.1 & 2.(-9) & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & -14 & 70 \\ 66 & -22 & 106 \\ 2 & -18 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = BB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+1.2+1.3 & 1.1+1.(-4)+1.5 & 1.1+1.2+1.7 \\ 2.1+(-4).2+2.3 & 2.1+(-4)(-4)+2.5 & 2.1+(-4).2+2.7 \\ 3.1+5.2+7.3 & 3.1+5.(-4)+7.5 & 3.1++5.2+7.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 46 & -14 & 70 \\ 66 & -22 & 106 \\ 2 & -18 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14+46+6 & 72+(-14)+2 & 39+70+10 \\ -30+66+0 & 91+(-22)+28 & 50+106+8 \\ -18+2+34 & -16+(-18)+18 & -7+10+62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 60 & 119 \\ 36 & 97 & 164 \\ 18 & -16 & 65 \end{bmatrix}$$

En conclusión, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

La igualdad que en realidad se cumple es $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$, y sólo en aquellos casos en los que se verifique que $AB = BA$, se cumplirá que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

c) En el apartado b) se han calculado A^2 y B^2, por tanto,

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} -14 & 72 & 39 \\ -30 & 91 & 50 \\ -18 & -16 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 28 & 8 \\ 34 & 18 & 62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14-6 & 72-2 & 39-10 \\ -30-0 & 91-28 & 50-8 \\ -18-34 & -16-18 & -7-62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 70 & 29 \\ -30 & 63 & 42 \\ -52 & -34 & -69 \end{bmatrix}$$

Para calcular $(A + B)(A - B)$, se ha de calcular cada uno de los factores, el primero se ha calculado en el apartado b) y el segundo es:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 6-1 & 3-1 \\ 0-2 & 9-(-4) & 5-2 \\ -6-3 & 2-5 & 1-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 13 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

De esta manera

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 13 & 3 \\ -9 & -3 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.1+7.(-2)+4.(-9) & 3.5+7.13+4.(-3) & 3.2+7.3+4.(-6) \\ 2.1+5.(-2)+7.(-9) & 2.5+5.13+7.(-3) & 2.2+5.3+7.(-6) \\ (-3).1+7.(-2)+8.(-9) & (-3).5+7.13+8.(-3) & (-3).2+7.3+8.(-6) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -47 & 94 & 3 \\ -71 & 54 & -23 \\ -89 & 52 & -33 \end{bmatrix}$$

En conclusión, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.

La igualdad que en realidad se cumple es $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$, y al ser $AB \neq BA$, como se ha comprobado en el apartado a), no se verifica $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

4) No existe un solo conjunto de operaciones elementales con las que escalonar una matriz. Por tanto, para cada matriz, la matriz escalonada equivalente que se obtiene no es única, aunque todas han
de tener el mismo número de filas nulas ya que el rango de una matriz es único.

a)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 2 & 5 & 10\\ 1 & 10 & -11\end{bmatrix} \quad F_2 \to F_2-2F_1,\ F_3 \to F_3-F_1 \quad \begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & -3 & 5\\ 0 & 6 & -10\end{bmatrix} \quad F_3 \to F_3+2F_2 \quad \begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg A = 2.

b)

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix} \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\\ 5 & -2\end{bmatrix} \quad F_2 \to F_2-3F_1, \quad F_3 \to F_3-5F_1 \quad \begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & -11\\ 0 & -22\end{bmatrix} \quad F_3 \to F_3-2F_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & -11\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

La primera operación elemental que se realiza, intercambiar la primera y segunda fila, tiene como objetivo obtener como "elemento pivote" el valor 1, lo que facilitará las posteriores operaciones
elementales.

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg A = 2.

c) $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{bmatrix} \quad F_1 \to (1/2)F_1 \quad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix} \quad F_2 \to F_2-5F_1 \quad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -7\end{bmatrix}$

La primera operación elemental que se realiza, multiplicar la primera fila por 1/2, tiene como objetivo obtener como "elemento pivote" el valor 1, lo que facilitará las posteriores operaciones elementales.

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene dos filas no nulas, por tanto, rg A = 2.

Otra manera de escalonar la matriz A es la siguiente:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{bmatrix} \quad F_2 \to 2F_2-5F_1 \quad \begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -14\end{bmatrix}$$

d) La matriz A se puede escalonar haciendo operaciones elementales por filas y por columnas, como se muestra a continuación.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ -2 & -7 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad F_2 \to F_2 + 2F_1, \quad F_3 \to F_3 - F_1$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 7 & -4 \end{bmatrix} \quad F_3 \to F_3 + 2F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz escalonada equivalente a A obtenida tiene tres filas no nulas, por tanto, rg A = 3.

IV.9.1.2-Autoevaluación

1) Determinar el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 8 & -5 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

- [ ] *tres*
- [ ] *uno*
- [ ] *dos*
- [ ] *cuatro*

2) ¿Cuánto vale el rango de la matriz identidad de orden 4?

- [ ] *1*
- [ ] *4*
- [ ] *0*
- [ ] *2*

3) Determinar la matriz opuesta de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

- [ ] $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

4) Determinar una matriz equivalente a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 10 & 5 & -6 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

5) ¿Qué deben verificar dos matrices cuadradas A y B para que sea cierta la siguiente igualdad?

$$(A-B)(A-B) = A^2 - 2AB + B^2$$

- [ ] La matriz BA ha de ser regular
- [ ] La matriz AB ha de ser regular
- [ ] AB = BA
- [ ] A y B han de ser regulares

6) Determinar la matriz transpuesta de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

- [ ] $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$

7) Si A y B son dos matrices de orden 2x5, ¿cuál de las siguientes operaciones se puede realizar?

- [ ] ABA
- [ ] A^2
- [ ] $2A - B$
- [ ] $A + 3B^2$

8) Si A y B son dos matrices de orden 3x2, ¿de qué orden es la matriz resultante de trasponer A + B y multiplicar el resultado a la derecha por la matriz A?

- [ ] *2x2*
- [ ] *2x3*
- [ ] *3x3*
- [ ] *3x2*

IV.9.2.-Ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales

IV.9.2.1-Ejercicios

1) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

a) Escribir la expresión matricial del sistema
b) Discutir el sistema.
c) Resolver el sistema por el método de Gauss.

2) Discutir y resolver el sistema homogéneo $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

3) dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y \quad 2z + 3t = 1 \\ -x - 2y - 3z - 4t = 0 \\ 2x + 3y + 5z + 7t = 1 \\ 2x + 2y + 4z + 6t = 2 \end{cases}$

Indicar si tiene solución y calcularla en este caso.

4) Hallar para qué valores de *a* el siguiente sistema es compatible determinado y calcular su solución para esos valores.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 7 \\ -x + y + z = 3 \\ 2x + ay - 4z = a \end{cases}$$

5) Estudiar según los valores de *a* si el siguiente sistema es de Cramer y calcula en estos casos su solución

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 3 \\ 5x - y + az = 10 \\ x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

IV.9.2.1.-Resolución

1) a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) Escribimos la matriz ampliada del sistema dado y la escalonamos mediante operaciones elementales por filas. Observar que en este proceso también se escalona A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 4 & 5 & \vdots & 6 \end{bmatrix} \quad F_2 \rightarrow F_2 2F_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad rg \;\; A = 2 = n^{\text{o}} \; de \; incógnitas$$

Aplicando el teorema de Rouche-Frobenius se deduce que el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

c) Teniendo en cuenta que $\begin{bmatrix} 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$, el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ -y \qquad = 0 \end{cases}$ es equivalente al inicial.

De la segunda ecuación se obtiene $y = 0$, y sustituyendo en la primera $2x + 3.0 = 3$, por tanto, x=3/2.

Luego la solución del sistema es x =3/2, y=0

2) Por ser un sistema homogéneo compatible. Calculamos el rango de A para determinar el número de soluciones que posee.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad F_2 \rightarrow F_2 - F_1; F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, rg(A)= 2, por tanto el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.
El grado de indeterminación de sistema es 3 – rg$A$ = 3 - 2 = 1, por lo que la solución dependerá de un parámetro.

Para calcular la solución del sistema dado se resuelve el sistema equivalente asociado a la matriz escalonada que es:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -3y+2z=0 \end{cases}$$

De la última ecuación se obtiene 3y = 2z , luego, y =2z/3

Sustituyendo en la primera, x + 2z/3-z= x- z/3=0, luego x=z/3

Por lo tanto, las soluciones del sistema es: x=z/3; y=2z/3; z un número real cualquiera.

3) Escalonamos la matriz ampliada para determinar el rango de A.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \vdots & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \quad F_2 \to F_2 + F_1; F_3 \to F_3 - 2F_1; F_4 \to F_4 - 2F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \quad F_3 \to F_3 + F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \quad F_4 \to F_4 - 2F_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

rg A = 2 ≠ rg A^a = 3 entonces el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución

4) Estudiamos los rangos de A, escalonando la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 7 \\ -1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & a & -4 & \vdots & a \end{bmatrix} \quad F_2 \to F_2 - F_1; F_3 \to F_3 + F_1; F_4 \to F_4 - 2F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 6 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & a-2 & -2 & \vdots & a-2 \end{bmatrix} \quad F_3 \to F_3 + F_2; F_4 \to 2F_4 + (a-2)F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 2(a-4) & \vdots & 8(a-2) \end{bmatrix}$$

$$F_4 \to F_4 - (a-4)F_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -2a+24 \end{bmatrix}$$

En este caso rg A = 3 independientemente del valor de a y como el número de incógnitas es también 3 para que el sistema sea compatible determinado debe ocurrir que rg A^a sea 3.

rg $A^a = 3$ si $-2a + 24 = 0$ $\quad a = -24/-2 = 12$

Resolvamos el sistema para $a = 12$ por el método de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Luego el sistema a resolver es} \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 2z = 6 \\ 2z = 10 \end{cases}$$

Despejando

$$\Rightarrow \quad 2z = 10 \Rightarrow \quad z = 5$$
$$-2y + 2z = 6 \Rightarrow \quad -2y = 6 - 2z = 6 - 2.(5) = -4 \quad \Rightarrow y = 2$$
$$x + y - z = 1 \Rightarrow \quad x = 1 - y + z = 1 - 2 + 5 = 4 \quad x = 4$$

Por lo tanto, la solución para a= 12 es x = 4, y =2, z =5

5) Como el número de ecuaciones del sistema coincide con el de incógnitas, será un sistema de Cramer si $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & a \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = -6 + 20 - a + 4 - 2a + 15 = -3a + 33 = -3(a - 11)$$

Por lo tanto, si $a \neq 11$ $|A| \neq 0$ y el sistema es un sistema de Cramer y por ello compatible determinado, es decir, con solución única para cada valor de a distinto de 11.
Para resolverlo utilizaremos la regla de Cramer.

$$X=\frac{\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 10 & -1 & a\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}}{-3(a-11)}=\frac{-9-4a+40+16-3a+30}{-3(a-11)}=\frac{7}{3}$$

$$Y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 10 & a\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}}{-3(a-11)}=\frac{60+3a+80-40-8a-45-3(a-11)}{-3(a-11)}=\frac{5}{3}$$

$$Z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}}{-3(a-11)}=\frac{-8-10+15+3-20+20}{-3(a-11)}=0$$

Así, rg(*A)*= 2, por tanto el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.
El grado de indeterminación de sistema es 3 – rg*A* = 3 - 2 = 1, por lo que la solución dependerá de un parámetro.
Observar que en este caso el valor

Observar que en este caso el valor de *x, y, z* es independiente de *a*.

IV.9.2.2.- Autoevaluación

1) ¿Cuál es el orden de la matriz ampliada de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas?

- [ ] 4x3
- [ ] 3x4
- [ ] 4x4
- [ ] 3x3

---

2) La solución del siguiente sistema es:

$$\begin{aligned} -3x - y + 2z &= 1 \\ x - 3y - z &= a \\ 3x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

- [ ] $x = (3a+5)/30$, $y = (-9a-5)/30$, z cualquier número real
- [ ] No tiene solución para ningún valor de a
- [ ] $x = (3a+5)/30$, $y = (-9a-5)/30$, $z = 2/3$
- [ ] $x = 4/15$, $y = -7/15$, z cualquier número real

3) ¿Qué se puede afirmar de un sistema lineal cuya matriz de coeficientes tiene determinante igual a 5?

- [ ] Es compatible determinado
- [ ] Es compatible indeterminado
- [ ] Es completo
- [ ] Es incompatible

---

4) El siguiente sistema cumple:

$$
\begin{aligned}
x + y - 2z &= 0 \\
2x + y - 3z &= 0 \\
3x + 2y - 5z &= 0
\end{aligned}
$$

- [ ] Es compatible indeterminado y su solución es $x = z$, $y = z$, siendo z un número real cualquiera
- [ ] Es compatible determinado y su solución es $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$
- [ ] Es compatible determinado y su solución es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
- [ ] Es compatible indeterminado y su solución es $x = 0$, $y = 0$, z siendo z un número real cualquiera

5) ¿Cúal de las siguientes operaciones realizadas en la matriz ampliada de un sistema, da lugar a una matriz correspondiente a un sistema equivalente al inicial?

- [ ] Se sustituye la primera fila por el resultado de sumarle el doble de la tercera
- [ ] Se multiplica la primera fila por la segunda fila
- [ ] A la primera fila se le suma la segunda columna
- [ ] Se sustituye la primera fila por el resultado de multiplicarla por 0 y sumarle el doble de la tercera

6) ¿Cúal de las siguientes afirmaciones es falsa?

- [ ] Todo sistema compatible es Cramer
- [ ] Todo sistema lineal homogéneo es compatible
- [ ] Todo sistema de Cramer es compatible
- [ ] Todo sistema compatible se puede reducir a uno de Cramer

7) El siguiente sistema es:

$x + 2y + z = 7$
$x - 2y + z = 3$
$x + y + z = 6$

- [ ] Incompatible
- [ ] Compatible Determinado
- [ ] Homogéneo
- [ ] Compatible Indeterminado

8) Aplicando el Teorema de Rouche- Frobenius a un sistema AX = B de tres ecuaciones con dos incógnitas y AB distinto de 0, verifica:

- [ ] Es Compatible Determinado
- [ ] Es Compatible Indeterminado
- [ ] Es un sistema de Cramer
- [ ] Es Incompatible

IV.9.3.-Ejercicios de determinantes

IV.9.3.1.-Ejercicios propuestos

1. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -5 & 13 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular:

a) el menor complementario del elemento a_{21}
b) el adjunto del elemento a_{32}

3) calcular el siguiente determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

a) por la regla de Sarrus
b) Desarrollando por la segunda columna (por el método de los cofactores)

4) Escribir las propiedades de los determinantes que nos permiten asegurar que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} 4 & 20 & 8 \\ 4 & 20 & -1 \\ -3 & -15 & -1 \end{vmatrix} = 0$

5. Decir si las siguientes matrices son regulares y en caso afirmativo calcular su inversa mediante adjuntos:

a) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Mediante adjuntos, calcular la matriz inversa de A para aquellos valores del parámetro real a que sea posible.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

IV.9.3.1.- Resolución

1) a) $\begin{vmatrix} -5 & 13 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (-5)(-3)-4.(13)=15-52=-37$

b) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 8 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8(-1)(-4)+3.(3).0+1.(1).(-1)-0.(-1).1-(-1).(3).(8)-(-4).(1).(3)=$

$=32+0-1-0+24+12=67$

Para poder realizar el cálculo se agregan las dos primeras filas en la parte inferior del determinante.

2) a) Para calcular el menor complementario del elemento a_{21}, se escribe el determinante de la matriz eliminando la segunda fila y la primera columna, $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -1\left(\ 1.(3) - 0.(7) \ \right) = -3$

3)

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 2.(1/2).4 + 0.(1).(-1) + (-2).(3).(-1) - (-1).(1/2).(-2) - (-1).(1).(2) - 4.(3).(0) =$$

$$= 4 + 0 + 6 - 1 + 2 - 0 = 11$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3A_{12} + \frac{1}{2}A_{22} + 1A_{32}$$

Eligiendo la columna del medio para trabajar, ahora calculamos cada uno de los adjuntos:

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1).(0-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (1).(8-2) = 6$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1).(-2-0) = 2$$

Y sustituimos en el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3.A_{12} + \frac{1}{2}.A_{22} + 1.A_{32} = 3.(2) + \frac{1}{2}.(6) + 1.(2) = 11$$

4)
a) "Si en una matriz se multiplica una fila (columna) por un número real, el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz inicial multiplicado por dicho número".

Se observa que en este caso la segunda columna de la matriz inicial se multiplica por 1/2 para obtener la segunda columna de la otra matriz.

b) $\left|A^t\right| = |A|$

c) "El determinante de una matriz con una fila (columna) cuyos elementos son ceros es nulo".

d) "Si en una matriz se intercambian entre sí dos filas (columnas) el determinante cambia de signo".

Se observa que se han intercambiado F_1 y F_3.

e) "El determinante de una matriz con dos filas (columnas) iguales es nulo".

Se observa que $F_1 = F_3$.

f) "El determinante de una matriz con dos filas (columnas) proporcionales es nulo".

Se observa que $C_2 = 5\ C_1$.

5)
a) Al ser una matriz 2x3 no es cuadrada y, por lo tanto no tiene inversa.

b) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 54 + 0 - 18 - 0 - 36 = 0$$

Al ser el determinante igual a cero la matriz no tiene inversa.

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-1) + 6 - 0 - (-2) - (-2) = 9 \neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero la matriz tiene inversa. Para calcular A^{-1}, en primer lugar hallaremos los adjuntos de todos los elementos.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -1.(-2-6) = 8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1.(2-1) = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4+6 = 10 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -1(-2-6) = 8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1(2-1) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

La matriz adjunta de A es $\text{Adj}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -1 & 10 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ y la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 10 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{10}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{vmatrix}$$

6) Calculamos el determinante de A para hallar los valores del parámetro a que hacen que la matriz sea regular.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = 3a + 0 + 4a - 2a - 0 - 0 = 5a$$

Si el determinante es cero, la matriz no será regular.

Como la ecuación $5a = 0$ tiene por solución $a = 0$, esta matriz tiene matriz inversa para valores de a distintos de 0. Para estos valores de a, los adjuntos son:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3a \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-2a) = 2a$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & a \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2a \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} 2a - a = a \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a$$

Por lo tanto:

$$Adj(A) = \begin{vmatrix} 3a & 2a & -2a \\ -6 & 1 & 4 \\ a & -a & a \end{vmatrix}$$ y

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj(A))^{t}=\frac{1}{5a}\begin{vmatrix}3a & -6 & a\\ 2a & 1 & -a\\ -2a & 4 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{3}{5} & \frac{-6}{5a} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5a} & \frac{-1}{5}\\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5a} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}$$

<u>IV.9.3.2.-Autoevaluación</u>

1) Se llama matriz adjunta de la matriz A a:

- ☐ La matriz cuyo elemento ij es el menor complementario del elemento ij de la matriz A.
- ☐ La matriz que se obtiene al quitar la fila i y la columna j de la matriz A.
- ☐ La matriz inversa de A
- ☐ La matriz cuyo elemento ij es el adjunto del elemento ij de la matriz A.

2) Si A es una matriz cuadrada de orden 3 con |A| = -2, ¿a qué es igual |-A|?

- ☐ -6
- ☐ -2
- ☐ 0
- ☐ 2

3) La matriz inversa de una matriz regular A es igual a:

- ☐ La transpuesta de su matriz adjunta
- ☐ La adjunta de su matriz transpuesta
- ☐ El producto del inverso del determinante de A por su matriz adjunta transpuesta
- ☐ El producto del inverso del determinante de A por su matriz adjunta

4) Dadas A y B matrices cuadradas de orden 3, ¿cuál de las siguientes igualdades es cierta?

- [ ] $|2A| = 2\,|A|$
- [ ] $|AB| = |B||A|$
- [ ] $|2A| = 6\,|A|$
- [ ] $|A+B| = |A| + |B|$

5) De entre las siguientes proposiciones señala la que es falsa:

- [ ] Si A es una matriz cuadrada entonces $|t.A| = t.|A|$, siendo t un número real.
- [ ] Si A es una matriz regular entonces el determinante de su matriz inversa coincide con el inverso del determinante de A
- [ ] Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces $|AB| = |A|\,|B|$
- [ ] El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta

6) El adjunto del elemento que está en la quinta fila y la segunda columna de una matriz A es:

- [ ] La traspuesta del menor complementario de ese elemento
- [ ] El menor complementario de ese elemento
- [ ] El producto de (-1) elevado a 5+2 por la matriz que se obtiene al quitar de A la fila 5 y la columna 2
- [ ] El opuesto del menor complementario de ese elemento

7) Si A es una matriz regular entonces:

- [ ] A no tiene matriz inversa
- [ ] $|A| = 0$
- [ ] A tiene matriz inversa
- [ ] A es una matriz simétrica

8) Si |A|= 5 y |B| = -5, ¿a qué es igual |AB|?

- [ ] 1
- [ ] 25
- [ ] -1
- [ ] -25

IV.9.4.-Bibliografía especifica para los ejercicios propuestos

- MATEMÁTICAS EMPRESARIALES
  Alegre, P. y otros
  Editorial AC, Madrid, 1995 (Cap. 2, pp. 39-82).

- ÁLGEBRA LINEAL
  Bermudez, L.; Pociello, E.; Ruiz, E. y Varea, J.
  Ediciones MEDIA, Barcelona, 1995 (Cap. 1, pp. 1-24).

- PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL PARA LA ECONOMÍA
  Heras, A. y Vilar, J. L.:
  Editorial AC, Madrid, 1998 (Cap. 1, pp. 1-51).

- MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA. ÁLGEBRA LINEAL Y CÁLCULO DIFERENCIAL
  JARNE, G., PÉREZ-GRASA, I. y MINGUILLÓN, E.
  Editorial McGraw-Hill, Madrid, 1997 (Cap. 2, pp. 17-45).

- CURSO BÁSICO DE MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS I
  LÓPEZ, M. y VEGAS, A
  Editorial Pirámide, Madrid, 1994 (Cap. 1, 2 y 3, pp. 35-96).

- INTRODUCCIÓN A LA ECONOMÍA MATEMÁTICA
  SAN MILLÁN, M.A. y VIEJO, F
  Editorial Pirámide, Madrid, 1992 (Cap. 13 y 14, pp. 209-228).

V.-Bibliografía General

- ALGEBRA LINEAL CON GEOMETRÍA: Tomo I , Tomo II
  Irma Ruffiner
  Lucrecia Etchemaite
  Mercedes Martinelli

- ALGEBRA SUPERIOR
  Araceli Reyes Guerrero
  Editorial : Thomson

- ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA
  Samuel Selzer
  Editorial: Nigar

- ALGEBRA Y TRIGONOMETERIA CON GEOMETRIA ANALITCA
  Louis Leithold
  Editoial: OXFORD University Press

- ALGEBRA CON APLICACIONES
  Elizabeth P.Phillipd-Thomas Butts-Michel Shaughnessy
  Editorial: Harla- Mexico

- ALGEBRA Y GEOMETRIA
  S.Gigena-F.Molina-O.Gómez.A.Vignoli
  Editorial: Cientifica Universitaria

- GEOMETERIA ANALITICA
  Elena de Oteyza
  Emma Lam Osnaya
  José Antoonio Gomez Ortega
  Arturo Ramires Flores
  Carlos Hernández Gareladiego
  Editorial: Prentice-Hall, Hispanoamericana, S.A.

- INTRODUCCION MODERNA A LA MATEMATICA SUPERIOR
  Allendoerfer y Oakley
  Segunda Edición. Mac Graw-Hill. Madrid 1967- (1 ejemplar en B.C.UNSE)

- ALGEBRA MODERNA Y TRIGONOMETRIA
  Dolciani-Berman-Wooton
  Publicaciones Cultural S.A. 1965

- INTRODUCCION AL ALGEBRA LINEAL
  Howard Antón
  Cuarta Edición 1990 – Limusa-Mexico-(6 ejemplares en BC UNSE)

- ALGEBRA Y GEOMETERIA ANALITICA
  Lehmann, Charles H.
  Limusa 1997. Mexico- (1 ejemplar en BC UNSE)

- ALGEBRA Y GEOMETRIA
  Hernández, Eugenio
  Universidad A. de Madrid 1987- Madrid (1 ejemplar en BC UNSE)

- ALGEBRA I y ALGEBRA II
  Rojo, Armando
  2ª Edición- El Ateneo. 1986- Bs.Aires (10 ejemplares en BC UNSE)

- ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA CON GEOMETRIA ANALÍTICA
  Swokowski.Cole
  Décima edición-Thomson-Learning-México-2002

- GEOMETRÍA ANALÍTICA EN FORMA VECTORIAL Y MATRICIAL
  Sunkel Albino de
  Primera Edición-Nueva Librería 1984-Bs.Aires