SERIE DIDÁCTICA Nº 37

E-Book ISBN 978-987-1676-51-4
Fecha de catalogación: 19/12/2014.

FCF·UNSE
DESDE 1958

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO
FACULTAD DE CIENCIAS FORESTALES
Ingeniero Néstor René Ledesma

CÁTEDRA DE ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

EL ÁLGEBRA VECTORIAL
Y LA GEOMETRÍA PLANA Y ESPACIAL

EQUIPO DOCENTE
Lic. Josefa Sanguedolce
Lic. Elsa Ibarra de Gómez
Lic. Silvia Navarro de Ger

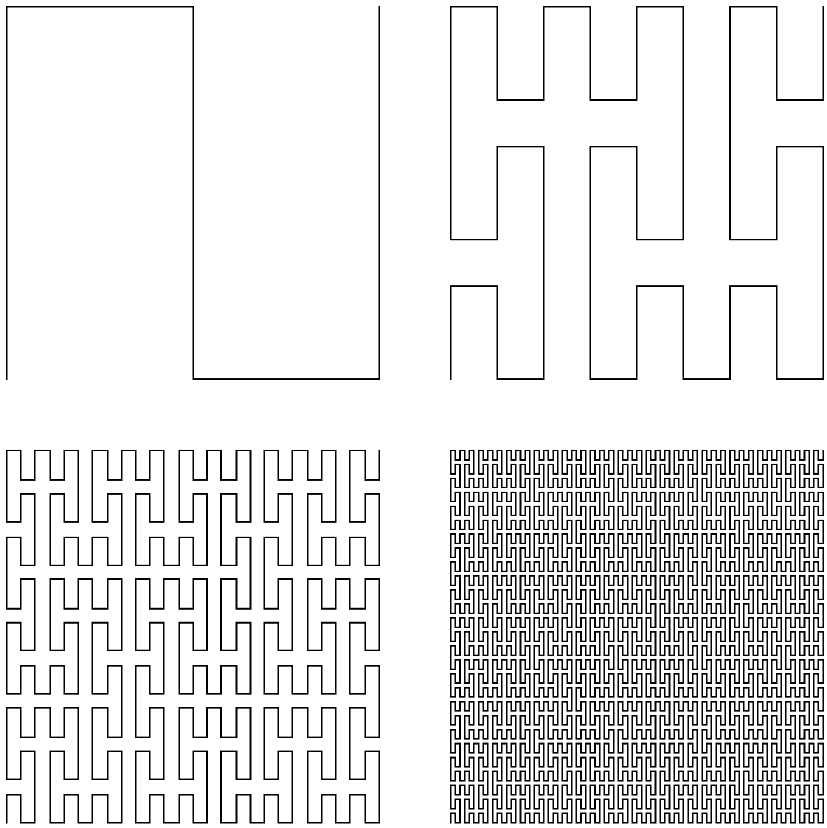
AYUDANTES DOCENTES
Sr. Oscar Barreto
Srta. Cintya Prado

MARZO 2011

Arte de tapa: Lic. Federico Soria

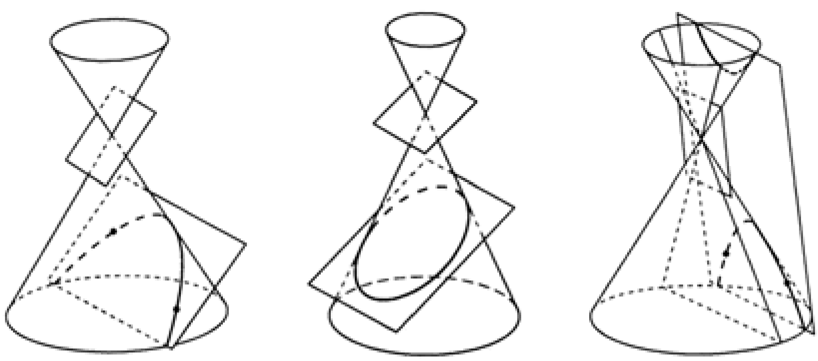
INTERPRETACIÓN DE LA PORTADA DE LA SERIE DIDACTICA Nº 37

El fondo representa una de las curvas del matemático italiano Giuseppe Peano



El rostro enmarcado en un cono circular es la gran cientifica Hipatia de Alejandría (355-415), primera mujer matemática de la que tenemos un conocimiento razonablemente seguro y detallado, que estudió las cónicas de Apolonio (Apolonio de Perga era contemporáneo de Arquímedes 286 a. C. - 212 a. de J.C.).

Cónicas de Apolonio



INDICE

"La Matemática ha exigido siglos de excavación, y ese proceso de búsqueda no está concluido ni lo estará nunca. Pero hoy día vemos ya lo excavado con claridad suficiente como para distinguir entre ello y las herramientas utilizadas para la excavación"

(Philip E. B. Jourdain 1879-1919)

INTRODUCCION

En esta segunda Serie Didáctica en la cátedra de Algebra y Geometría Analítica se tuvieron en cuenta además de los aspectos enunciados en la primera Serie Didáctica, otros como ser:

- Establecer la relación entre la geometría y el algebra.
- Describir la construcción de un sistema, donde las ideas intuitivas básicas se suponen conocidas.
- La utilidad del procedimiento gráfico-intuitivo para exhibir y estudiar asuntos puramente algebraicos operacionales.
- Proporcionar una base para una definición rigurosa de las nociones geométricas.
- La conducción a la algebrización de la teoría de vectores considerando los conjuntos ordenados de los números reales.
- Definir la noción de espacio vectorial real y otros conceptos elementales asociados, tales como ecuaciones de la recta, ecuaciones del plano y aplicaciones de la teoría de vectores a la Geometría Plana (circunferencia y cónicas) y a la Trigonometría Plana.
- Mostrar que el espacio en que vivimos es euclídeo y así interpretar, por ejemplo a la relación pitagórica, los conceptos de longitud de vectores, distancia entre dos puntos y otros resultados.
- Deducir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, por comparación del método intuitivo cuidadoso (prueba gráfica-trigonométrica) con el algebraico riguroso (que culmina con la definición de ángulo entre dos vectores).
- Interpretar geométrica y algebraicamente la función producto vectorial en el espacio vectorial de ternas ordenadas de números reales; aplicando la misma en resultados relacionados a la geometría analítica plana, como ser ecuación del plano que contiene a tres puntos, área del paralelogramo y teorema del seno de un ángulo entre dos vectores.

Además la intención fundamental a través de esta Serie Didáctica es la de proporcionar al estudiante de las carreras de la Facultad de Ciencias Forestales, de un material que le permita abordar un estudio de mayor profundización sobre los temas que se desarrollan en la misma, incluidos en los contenidos de la asignatura Algebra y Geometría Analítica.

Año 2011

Lic. Josefa Sanguedolce

I.- BREVE RESEÑA HISTÓRICA

I.1.- Inicios del Álgebra

I.2.-Períodos del Álgebra

I.3.- Períodos más sobresalientes en la Historia de la Matemática

I.4.- Historia acerca de la estructura de los Espacios Vectoriales

I.4.1.- Breve reseña histórica de matemáticos precursores del estudio de los Espacios Vectoriales

"Cuando se nos otorga la enseñanza se debe percibir como un valioso regalo y no como una dura tarea, aquí está la diferencia de lo trascendente."
Albert Einstein (14-03-74/ 18-04-55)

I.-Breve Reseña Histórica

I.1.- Inicios del Algebra

Diofanto de Alejandría (Diophanti Alexandrini) (214-298) fue un antiguo matemático griego. Se considera a Diofanto el padre del Algebra. Nacido en Alejandría, nada se conoce con seguridad de su vida salvo la edad a la que falleció, gracias a este epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega:

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupo la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Paso aun una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$ donde x es la edad que vivió Diofanto

Según esto, Diofanto falleció a la edad de 84 años. Se ignora, sin embargo en que siglo vivió. Si es el mismo astrónomo Diofanto que comentó Hipatia (fallecida en 415), habría fallecido antes del siglo V, pero si se trata de personas distintas cabe pensar que vivía a finales de dicho siglo, ya que ni Proclo ni Papo le citan, lo que resulta difícil de entender tratándose de un matemático que pasa por ser el inventor del algebra. En opinión de Albufaraga, Diofanto vivía en los tiempos del emperador Juliano, hacia 365, fecha que aceptan los historiadores.

I.2.- Períodos del Algebra

El Algebra presenta tres periodos claramente diferenciados por el lenguaje algebraico empleado en cada uno. Estos periodos son:

- Retórico o Verbal.
- Sincopado o Abreviado.
- Simbólico.
- Retórico o Verbal

Se extiende, aproximadamente, desde el año 1700 AC hasta la época de Diophanto, se caracteriza por el uso de la palabra, a través de frases largas.

- Periodo Sincopado o Abreviado

Este período es comprendido desde el año 300 AC – 450 AC y dura aproximadamente hasta el siglo XVI.

Se caracteriza por la utilización de algunos sincopes o abreviaturas.

Diophanto durante el período 300AC – 4500 AC comenzó a introducir signos para designar la igualdad, la resta y la potencia de un número desconocido.

La solución de problemas radicaba en encontrar la identidad de las letras más que la encontrar una forma de expresar lo general.

La expresión polinómica

$$3x^3 + 5x^2 - 2x = 8$$

Se escribía en notación de Diophanto así:

$$\kappa . \gamma \Delta \sim \varepsilon \wedge \delta \beta \varepsilon \sigma \tau \xi \xi \eta$$

- Período Simbólico

Este período comprende los años 1600 – 1700. Ya los matemáticos tienen símbolos para expresar la incógnita.

El uso de símbolos permite la eliminación de información de superflua y da pie para generar otros conceptos matemáticos tal como el concepto de función.

El principal sistematizador es Francois Viéte, con su obra Isagoye un artem analíticus, sobre algebra simbólica en el siglo XVI

René Descartes dominó el siglo XVII y la mitad del siglo XVIII, dio origen a la fusión entre el álgebra y la geometría y completó el simbolismo algebraico

I.3.-Periodos más importantes en la Historia de la Matemática

Nacimiento de la Matemática

Hasta los siglos VI y V A.C.

Es una ciencia independiente con objeto y método propio

↓

Período de las Matemáticas Elementales

Desde los siglos VI y V A.C. hasta el siglo XVI.

Estudio de las magnitudes constantes

↓

Período de Formación de las Matemáticas de las magnitudes variables

Desde el siglo XVII, XVIII hasta el siglo XIX

Descartes, Leibnitz y Newton

↓

Período de las Matemáticas Contemporáneas

Aparece una matemática abstracta, con teorías nuevas.

Se construye un riguroso sistema de fundamento de la matemática

I.4.-Historia acerca de la estructura algebraica de los Espacios Vectoriales

Los espacios vectoriales se derivan de la geometría afín a través de la introducción de coordenadas en el plano o el espacio tridimensional. Alrededor de 1636, los matemáticos franceses Descartes y Fermat fundaron las bases de la geometría analítica mediante la vinculación de las soluciones de una ecuación con dos variables a la determinación de un curva plana. Para lograr una solución geométrica sin usar coordenadas, Bolzano introdujo en 1804 ciertas operaciones sobre puntos, líneas y planos, que son predecesores de los vectores. Este trabajo hizo uso del concepto de coordenadas baricéntricas de August Ferdinand Mobius de 1827.

El origen de la definición de los vectores es la definición de Giusto Bellavitis de bipoint, que es un segmento orientado, uno de cuyos extremos es el origen y el otro un objetivo. Los vectores se reconsideraron con la presentación de los números complejos de Argand y Hamilton y la creación de los cuaterniano es por este último (Hamilton fue además el que inventó el nombre de vector). Son elementos de R^2 y R^4; el tratamiento mediante combinaciones lineales se remonta a Laguerre en 1867, quien también definió los sistemas de ecuaciones lineales. En 1857,Cayley introdujo la notación matricial, que permite una armonización y simplificación de los aplicaciones lineales.

Casi al mismo tiempo, Grassmann estudió el cálculo baricéntrico iniciado por Möbius. Previó conjuntos de objetos abstractos dotados de operaciones. En su trabajo, los conceptos de independencia lineal y dimensión, así como de producto escalar están presentes. En realidad el trabajo de Grassmann de 1844 supera el marco de los espacios vectoriales, ya que teniendo en cuenta la multiplicación, también, lo llevó a lo que hoy en día se llaman álgebras.

El matemático italiano Peano dio la primera definición moderna de espacios vectoriales y aplicaciones lineales en 1888. Un desarrollo importante de los espacios vectoriales se debe a la construcción de los espacios de funciones por Henri Lebesgue. Esto más tarde fue formalizado por Banach en su tesis doctoral de 1920 y por Hilbert. En este momento, el álgebra y el nuevo campo del análisis funcional empezaron a interactuar, en particular con conceptos clave tales como los espacios de funciones p-integrables y los espacios de Hilbert. También en este tiempo, los primeros estudios sobre espacios vectoriales de infinitas dimensiones se realizaron.

I.4.1.-Breve reseña histórica de matemáticos precursores del estudio de los espacios vectoriales.

René Descartes

René Descartes (La Haye en Touraine actual Descartes, 31 de marzo de 1596-Estocolmo,11 de febrero de 1650) fue un filósofo, matemático y científico francés, considerado como el padre de la filosofía moderna.

La influencia de Descartes en las matemáticas es también evidente; el sistema de coordenadas cartesianas fue nombrado en honor a él. Se le atribuye como el padre de la geometría analítica, permitiendo que formas geométricas se expresaran a través de ecuaciones algebraicas. Descartes fue también una de las figuras clave en la revolución científica.

Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, Francia, 20 de agosto de 1601; Castres, Francia, 12 de enero de 1665) fue un jurista y matemático francés apodado por Eric Temple Bell con el sobrenombre de "príncipe de los aficionados".

Fermat fue junto con René Descartes uno de los principales matemáticos de la primera mitad del siglo XVII.

Descubrió el cálculo diferencial antes que Newton y Leibniz, fue co-fundador de la teoría de probabilidades junto a Blaise Pascal e independientemente de Descartes, descubrió el principio fundamental de la geometría analítica. Sin embargo, es más conocido por sus aportaciones a la teoría de números en especial por el conocido como último teorema de Fermat, que preocupó a los matemáticos durante aproximadamente 350 años, hasta que fue resuelto en 1995.

Fermat es uno de los pocos matemáticos que cuentan con un asteroide con su nombre, (12007) Fermat. También se le ha dado la denominación de Fermat a un cráter lunar de 39 km de diámetro.

Bernard Bolzano

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (Praga, Bohemia, 5 de octubre de 1781 - 18 de diciembre de 1848) fue un matemático, lógico, filósofo y teólogo bohemio que escribió en alemán y que realizó importantes contribuciones a las matemáticas y a la Teoría del conocimiento.

En matemáticas, se le conoce por el teorema de Bolzano, así como por el teorema de Bolzano-Weierstrass, que esbozó como lema de otro trabajo en 1817, y décadas después habría de desarrollar Karl Weierstrass

En su filosofía, Bolzano criticó el idealismo de Hegel y Kant afirmando que los números, las ideas, y las verdades existen de modo independiente a las personas que los piensen.

Edmond Laguerre

Edmond Nicolas Laguerre (9 de abril de 1834, Bar-le-Duc - 14 de agosto de 1886), fue un matemático francés, conocido principalmente por la introducción de los polinomios que llevan su nombre.

Comenzó sus estudios en la École Polytechnique (Promoción X1853). Efectuó una carrera militar de 1854 a 1864 como oficial de artillería. Luego, fue tutor de la École polytechnique.

Gracias al apoyo de Joseph Bertrand, obtiene la cátedra de físico matemático en el Colegio de Francia, en 1883, y se convierte en miembro de la Academia de Ciencias en 1885.

Laguerre publicó más de 140 artículos sobre los diferentes aspectos de la geometría y del análisis. Sus obras completas fueron publicadas en diez volúmenes entre 1898 y 1905 por encargo de Charles Hermite, Henri Poincaré y Eugène Rouché

Giuseppe Peano

Giuseppe Peano (27 de agosto de 1858 - 20 de abril de 1932) fue un matemático y filósofo italiano, conocido por sus contribuciones a la Teoría de conjuntos. Peano publicó más de doscientos libros y artículos, la mayoría en matemáticas. La mayor parte de su vida la dedicó a enseñar en Turín.

VECTORES DE R^n

"El Álgebra es generosa; a menudo nos da más de lo que le pedimos"
Jean le Roed d'Alembert (1717-1783)
Citado en la obra de Carl B. Boyer en el libro "A History of Mathematics"

II.-Vectores de IR ^{n}

II.1.-CONJUNTOS ORDENADOS: n-uplas ordenadas de números reales

Sea un conjunto cuyos elementos se denominan p y q, que se representa por {p, q}. Además {p, q}= {q, p} lo cual nos dice que el orden en que se consideren los elementos carece de importancia. Sin embargo, en muchos casos interesa el orden de los elementos del conjunto. En tal caso, el conjunto se dice que es ordenado.

Definición: "Un conjunto ordenado se indica poniendo entre paréntesis los símbolos de sus elementos, los cuales se anotan en su orden".

Según el número de componentes de un conjunto ordenado podemos tener: pares, ternas, cuaternas ordenadas, etc.

$$A^n = \{(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) / \forall_i = 1,2,...,n; a_i \in A\}$$

$n \in IN$ fijo. El símbolo A^n representa el conjunto de todos las n-uplas ordenadas de elementos.

Sean A y B conjuntos cualesquiera y en particular se tiene que:

$s \in A$ y $t \in B$, definimos par ordenado de primera componente *s* y segunda componente *t* al símbolo *(s, t)*

$$(s,t) = (s', t') \overset{def}{\Leftrightarrow} (s = s' \wedge t = t')$$

$$A \times B \overset{def}{=} \{(s,t) / (s \in A \wedge t \in B)\}$$

Si $A = B$ resulta $A \times A \overset{def}{=} A^2$. Resulta A^2 el conjunto de todos los pares ordenados de elementos de A.

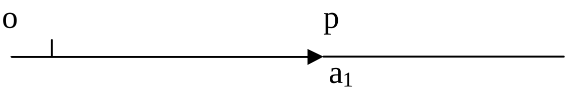
De igual modo: $A^3 = \{(x, y, z) / (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A)\}$ es el conjunto de todas las ternas de A.

Por definición: A^4 es el conjunto de todas las cuaternas de A, A^5 quíntuplas ordenadas y así sucesivamente.

Si consideramos *A =IR* se obtiene:

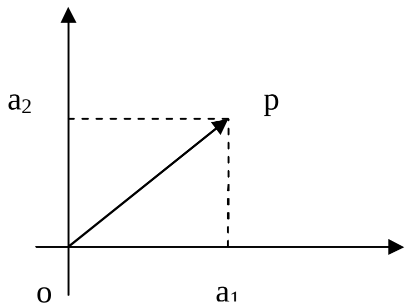
a) para n = 1: IR^1 = {(a_1) / $a_1 \in IR$} que se identifica con la recta real

Geométricamente: $\forall\, a_1 \in IR\ \exists\ p = (a_1)$ que se identifica con el vector $\overrightarrow{op}$



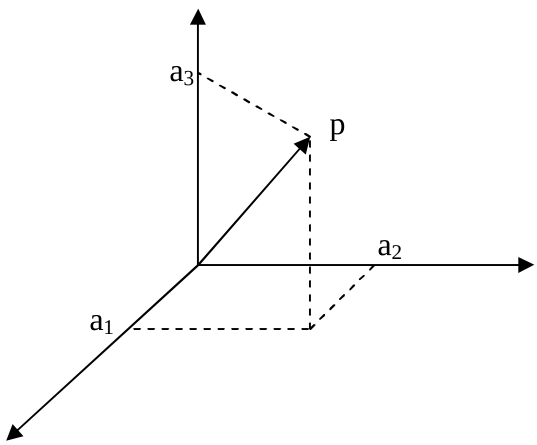
b) para n = 2: $IR^2 = \{(a_1, a_2) / a_1 \in IR, a_2 \in IR\}$ que se identifica con el plano.

Geométricamente: $\forall\ (a_1, a_2) \in IR^2, \exists\ p = (a_1, a_2)$ que se identifica con el vector $\vec{op}$ en el plano



c*)* para n = 3: $IR^3 = \{(a_1, a_2, a_3) / a_1 \in IR, a_2 \in IR, a_3 \in IR\}$ que se identifica con el espacio.

Geométricamente: $\forall\ (a_1, a_2, a_3) \in IR^3\ \exists\ p = (a_1, a_2, a_3)$ que se identifica con el vector $\vec{op}$ en el espacio



Análogamente se presenta el conjunto de las n-uplas ordenadas de números reales

$IR^n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) / a_1 \in IR, a_2 \in IR, a_3 \in IR, \ldots, a_n \in IR\}$

II.2.-La estructura de espacio vectorial

Sea V un conjunto de vectores, K un cuerpo de escalares ,una ley de composición interna definida como la suma de elementos del conjunto de vectores, y una ley de composición externa definida como el producto de un elemento del cuerpo K por un elemento del conjunto de vectores, esto es :

$+: V \times V \to V$ $\qquad$ $\cdot: K \times V \to V$

$(u, v) \mapsto u + v$ $\qquad$ $(\alpha, u) \mapsto \alpha \cdot u$

Definición:

La cuaterna (V, +, K, ·) es un espacio vectorial si y sólo si:

i) La suma de vectores verifica las propiedades: ley de composición interna, asociativa, conmutativa, existencia del elemento neutro y existencia del opuesto.

ii) El producto de un escalar del cuerpo K por un vector del conjunto V verifica las propiedades: ley de composición externa, distributiva del producto de un escalar con respecto a la suma de vectores y distributiva del producto de un vector con respecto a la suma de escalares, asociativa mixta y existencia del elemento neutro.

Esto es:

- Para $+: V \times V \to V \,/\, (u, v) \mapsto u + v$

1: La suma es Asociativa en *V*.

$+$ es Asociativa en $V \Leftrightarrow \forall\, u,v,w \in V: (u+v)+w = u+(v+w)$

2: Existe en V elemento neutro respecto de la suma.

$\exists\, 0_V \in V / \forall u \in V: u + 0_V = 0_V + u = u$ $\qquad$ 0_V : *Vector Nulo*

3: Todo elemento de *V* admite opuesto en *V*.

$\forall u \in V, \exists -u \in V /\ u + (-u) = (-u) + u = 0_V$ $\qquad$ $-u$: *Vector Opuesto*

4: La suma es Conmutativa en *V*.

$+$ es Conmutativa en $V \Leftrightarrow \forall\, u,v \in V: u+v = v+u$

- Para la Ley de Composición Externa: $\cdot: K \times V \to V / (\alpha, u) \mapsto \alpha \cdot u$

5: El producto satisface la asociatividad mixta.

$\forall\, \alpha, \beta \in K \wedge \forall u \in V: (\alpha.\beta).u = \alpha.(\beta.u)$

6: El producto es distributivo respecto de la suma en K.

$\forall\, \alpha, \beta \in K \wedge \forall u \in V: (\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$

7: El producto es distributivo respecto de la suma en *V*.

$\forall\, u, v \in V \wedge \forall \alpha \in K: \alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$

8: La unidad del cuerpo K es el neutro para el producto.

$\forall\, u \in V : \exists 1 \in \mathrm{K} \,/\, 1.u = u$

II.2.1.-Propiedades de los espacios vectoriales

Sea V un Espacio Vectorial sobre el cuerpo K.

Prop 1: El producto de cualquier escalar por el vector nulo es igual al vector nulo:

$\alpha\, 0_v = 0_v \,, \forall\, \alpha \in \mathrm{K}$

Prop 2: El producto del escalar nulo por cualquier vector es igual al vector nulo:

$o\, v = 0_v \,, \forall\, v \in \mathrm{V}$

Prop 3: El opuesto de cualquier escalar por un vector es igual al opuesto de su producto.

$$\forall\, v \in V \;\; \forall \alpha \in \mathrm{K} : (-\alpha).v = \alpha.(-v) = -(\alpha.v)$$

En particular si : $\alpha = -1, \forall\, u \in V : (-1).v = -v$

Prop 4: Si el producto de un escalar por un vector es el vector nulo y el vector no es nulo entonces el escalar es nulo

$$\alpha\, v = 0_v \wedge v \neq 0_v \Rightarrow \alpha = 0$$

II.2.2.-Espacio Vectorial Real

Si el cuerpo K se identifica con el cuerpo de los números reales IR, tenemos el espacio vectorial V sobre el cuerpo de los números reales, por lo que se denomina espacio vectorial real.

Si tomamos al conjunto de vectores V como los vectores de componentes pertenecientes al conjunto ordenado:

$\forall n \in IN$, IR = $\{(u_1, u_2,\ldots, u_i,\ldots, u_n) \,/\, u_i \in \mathrm{IR} \;\; \forall 1 \leq i \leq n \}$

Donde los elementos son n-uplas ordenadas de números reales

Podemos generalizar el concepto de la estructura del e.v. real (IR^n, +, IR,·)

Las operaciones del espacio vectorial real (IR^n, +, IR, ·) las definimos así:

Sean u = $(u_1, u_2,\ldots, u_i,\ldots, u_n)$,v = $(v_1, v_2,\ldots, v_i,\ldots, v_n) \in \mathrm{IR}^n$, $\alpha \in \mathrm{IR}$

+: $\mathrm{IR}^n \times \mathrm{IR}^n \rightarrow \mathrm{IR}^n$

$(u, v) \mapsto u + v = w$

tal que $w = (w_1, w_2,\ldots, w_i,\ldots, w_n) \overset{def}{=} (u_1+v_1 , u_2 + v_2, \ldots, u_i + v_i ,\ldots, u_n+ v_n)$

· : $\mathrm{IR} \times \mathrm{IR}^n \rightarrow \mathrm{IR}^n$

$(\alpha , u) \mapsto \alpha \cdot u$

tal que $\alpha \cdot u = \alpha \cdot (u_1, u_2,\ldots, u_i,\ldots, u_n) \overset{def}{=} (\alpha\, u_1, \alpha\, u_2,\ldots, \alpha\, u_i,\ldots, \alpha\, u_n)$

Estas operaciones cumplen con las propiedades que identifican a la cuaterna (IR^n, + IR,·) con el espacio vectorial real de los vectores de IR^n sobre el cuerpo de los números reales IR

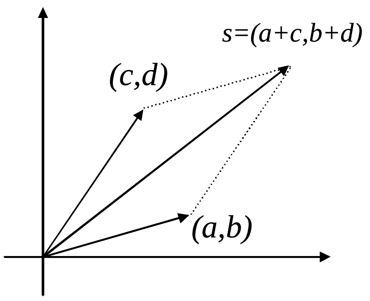
Son ejemplos de espacios vectoriales reales: (IR, +, IR, ·); (IR^2, +, IR, ·);...; (IR^n, + IR,·)

Esto es, para n = 1 se tiene el espacio vectorial (IR, +, IR, ·)

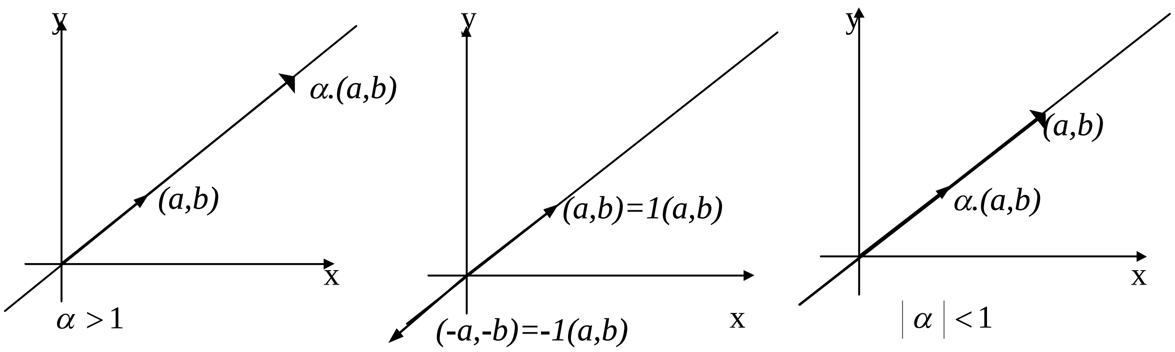
Si se toma n=2 se tiene: (IR^2, +, IR, ·) ,en el cual el significado geométrico de las operaciones definidas es el siguiente:

La suma de dos vectores del plano definida por:

u+v=$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ queda representada por la diagonal del paralelogramo que forman. Gráficamente:



El producto de un número real α por un vector no nulo, definida por: $\alpha.(a,b)=(\alpha.a,\alpha.b)$ es un vector que tiene la misma dirección que el vector dado y el mismo sentido si el número real es positivo, y sentido opuesto si el número real es negativo. Corresponde a una dilatación si $|\alpha|>1$ y a una contracción si $|\alpha|<1$. Si $\alpha=0$, entonces se obtiene el vector nulo.



II.2.3.-Espacio vectorial Euclídeo-Producto interior

Una gran variedad de hechos geométricos se basan principalmente en la posibilidad de medir las longitudes de los segmentos y los ángulos entre ellos. Esto no es posible en un espacio vectorial.

Por ello nuestro objetivo ahora será definir otros espacios a partir de una definición axiomática de lo que se da en llamar "producto escalar" o "producto interior de vectores".

II.2.3.1Definicones

Sea el espacio vectorial (V, +, K, ·). Definimos la ley llamada producto interior o producto escalar

$\bullet : V \times V \to K$

$(u, v) \mapsto u \bullet v$ (se lee: u producto interior v, o bien u producto escalar v)

Solo si se verifican los siguientes axiomas:

Ax 1. Conmutatividad: $\forall\, u, v \in V: u \bullet \mathbf{v} = v \bullet u$

Ax 2. Distributividad: $\forall\, u, v, w \in V: (u + v) \bullet \mathbf{w} = u \bullet w + v \bullet w$

Ax 3. Producto por un escalar: $\forall\, u, v \in V,\ \forall\, \alpha \in K: \alpha .(u \bullet v) = (\alpha . u) \bullet v$

Ax 4. $\forall\, u \in V: u \bullet u \geq 0.,\ u \bullet u = 0 \Leftrightarrow u = 0_v$

Un espacio real V se dice euclídeo si hay una regla que asigne a cada par de vectores $u,v \in V$ un número real llamado producto interior

En el e.v. real (IR^n, +, IR, $\bullet$) podemos definir una aplicación y probar que la misma es un *producto interior o escalar*. Esto es:

Sean $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, vectores de IR^n .Definimos

$. : IR^n \times IR^n \to IR$

$$(u, v) \mapsto u \bullet v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

O bien: $u \bullet v = u_1.v_1 + u_2.v_2 + \ldots + u_n.v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

Demostración:

Para probar que es un producto interior verificamos el cumplimiento de los axiomas

Ax 1. Conmutatividad: $\forall u, v \in IR^n$ / $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$: $u \bullet \mathbf{v} = v \bullet u$

$u.v = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \,.\, (v_1, v_2, \ldots, v_n) = u_1.v_1 + u_2.v_2 + \ldots + u_n.v_n =$

$= v_1u_1. + v_2u_2. + \ldots + v_n u_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \,.\, (u_1, u_2, \ldots, u_n) = v. u$

Ax 2. Distributividad: $\forall u, v \in IR^n$ / $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y

$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$: $(u + v) \bullet \mathbf{w} = u \bullet w + v \bullet w$

$(u + v) \bullet \mathbf{w} = [(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)] \,.(w_1, w_2, \ldots, w_n) =$

$= (u_1+v_1 , u_2 +v_2 , \ldots , u_n +v_n) \,.(w_1, w_2, \ldots, w_n) =$

$= (u_1+v_1) w_1 + (u_2 +v_2) w_2 +\ldots +(u_n +v_n) w_n =$

$= (u_1 w_1+v_1 w_1) + (u_2 w_2 +v_2 w_2) +\ldots +(u_n w_n+v_n w_n) =$

$= u_1 w_1+ u_2 w_2 + \ldots + u_n w_n + v_1 w_1 +v_2 w_2 +\ldots +v_n w_n =$

$=(u_1, u_2, \ldots, u_n) \,.(w_1, w_2, \ldots, w_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \,.(w_1, w_2, \ldots, w_n) =$

$= u \bullet w + v \bullet w$

Ax 3. Producto por un escalar: $\forall u, v \in IR^n$ / $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$,

$\forall \alpha \in IR$: $\alpha .(u \bullet v) = (\alpha . u) \bullet v$

$\alpha .(u \bullet v) = \alpha . [(u_1, u_2, \ldots, u_n) \,.\, (v_1, v_2, \ldots, v_n)] = \alpha .(u_1.v_1 + u_2.v_2 + \ldots + u_n.v_n) =$

$= \alpha .u_1.v_1 + \alpha . u_2.v_2 + \ldots + \alpha .u_n.v_n =$

$= (\alpha .u_1).v_1 +(\alpha . u_2) .v_2 + \ldots + (\alpha .u_n).v_n =$

$= (\alpha .u_1, \alpha . u_2, \ldots,\alpha .u_n) \,.(v_1, v_2,\ldots, v_n) =$

$= (\alpha . u) \bullet v$

Ax 4. $\forall u \in IR^n$: $u \bullet u \geq 0.$, $u \bullet u = 0 \Leftrightarrow u = 0_v$

Si $u = 0_v$, $u = (0,0,\ldots, 0)$ luego $u \bullet u = 0$

Si $u \neq 0_{v,}$ $u \bullet u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \bullet (u_1, u_2, \ldots, u_n) =$

$$= u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 \;\; > 0$$

Este *producto interior o escalar* se puede particularizar para :

el e.v. real $(IR^2, +, IR, \bullet)$, donde $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$, queda definido un *producto interior o escalar* del siguiente modo:

$\bullet : IR^2 \times IR^2 \rightarrow IR$ tal que $u.\mathbf{v} = (u_1.v_1 + u_2.v_2) = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i$

En forma análoga se define un producto interior en $(IR^3, +, IR, \bullet)$,

$\bullet : IR^3 \times IR^3 \rightarrow IR$ tal que $u.\mathbf{v} = (u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3) = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$

II.2.3.2.-Proposiciones

Proposición 1: En todo espacio vectorial de dimensión finita es posible definir un producto escalar

Proposición 2: Un espacio vectorial sobre el que se ha definido un producto escalar o interior recibe el nombre de Espacio Euclídeo (e.v.e.).

Propiedades del Producto Interior

i) $\forall\, u, v \in V, \forall\, \alpha \in IR: u \bullet (\alpha . v) = \alpha .(u \bullet v)$

ii) $: \forall\, u \in V : 0_v \bullet u = u \bullet 0_v = 0$

La definición de producto escalar nos permite introducir conceptos que en el caso de los espacios clásicos IR^2 , IR^3 ,…, IR^n son perfectamente conocidos

II.2.3.3.-Ortogonalidad y paralelismo entre dos vectores

Sea $(V, +, K, \cdot)$ e.v.e y sean u y $v \in V - \{ 0_v \}$. Decimos que u y v son ortogonales si y sólo si su producto interior es nulo.

$$u \perp v \Leftrightarrow u \bullet v = 0$$

Sean dos vectores u y v, diremos que u y v son paralelos si y solo si se verifica que:

$$u = cv,\ \forall c \in \mathrm{IR}-\{0\}$$

II.3.-Resultados que se deducen de un espacio vectorial euclídeo

II.3.1.-Norma de un vector

Definición

Sea (V, +, K, ·) e.v.real euclídeo, se dice que la relación, así definida:

$$\|\ \| : \mathrm{V} \to \mathrm{K}$$
$$\mathrm{u} \mapsto \|u\| \overset{def}{=} \sqrt{u.u}$$

Es un operador que identifica a la norma del vector u si cumple los siguientes axiomas:

N_1: $\forall u \in V : \|u\| \geq 0, \qquad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_v$

N_2: $\forall u \in V, \forall \alpha \in K : \|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$

N_3: $\forall$ u, v $\in$ V : $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular)

La definición general de norma se basa en generalizar a espacios vectoriales abstractos la noción de módulo de un vector de un espacio euclídeo.

A partir de las propiedades de la norma euclídea definida más arriba se extraen algunas condiciones razonables que debe cumplir la "longitud de un vector" o norma. Estas condiciones básicas son:

- Siempre es positiva e independiente del sentido (orientación) de la medición.
- La longitud debe ser directamente proporcional al tamaño (es decir, doble-o triple- de tamaño significa doble –o triple- de longitud)
- La longitud entre dos puntos será siempre menor o igual que la suma de longitudes desde esos mismos dos puntos a un tercero diferente de ellos (desigualdad triangular: la suma de dos lados de un triángulo nunca es menor que el tercer lado, también generalizado en el Teorema de Schwarz)

En el espacio vectorial real (IR^n. +, IR, ·) podemos definir $\forall u \in \mathrm{IR}^n$ su longitud, módulo o norma como el número positivo

$$\mathrm{d(u,0)} = \|u\| \overset{def}{=} \sqrt{u.u}$$

y también $\forall u,v \in \mathrm{IR}^n$ $\quad d(u,v) \overset{def}{=} d(u-v,0)$

$$\text{o sea } d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v).(u-v)}$$

A esta norma le llamaremos “norma euclídea o norma inducida por el producto interior”

De esta forma sea u $\in$ IR^n su longitud, modulo o norma es la raíz cuadrada no negativa del producto interior de dicho vector consigo mismo. El símbolo $\|u\|$ se lee módulo, longitud o norma de u.

La norma de un vector $\| \; \| : \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}$

$$u \mapsto \|u\| \overset{def}{=} \sqrt{u.u}$$

Considerando el producto interior definido anteriormente tendremos:

Sea u = $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathrm{IR}^n$ la norma de u es

$$\|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

En particular para IR^2 se tiene $\|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} u_i^2}$

y en forma análoga para IR^3 : $\|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i^2}$

En ambos casos $\sqrt{u.u} \geq 0$ representa la longitud del segmento $\overline{ou}$ (métrica euclídea).

<u>II.3.2.-Distancia entre vectores</u>

Definición: La distancia entre dos vectores, u y v en un e.v.e. está definida por el módulo de su diferencia:

$$d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v).(u-v)}$$

A partir de las propiedades de norma , fácilmente se obtienen los siguientes resultados:

Sea (V ,+, K , ·) e.v.e

i) $\quad d(u, v) = d(v, u) \qquad \forall\, u, v \in V$

ii) $\quad d(u, v) \geq 0 \qquad \forall\, u, v \in V$

iii) $d(u, v) = 0$ si y solo si $u=v \quad \forall\, u, v \in V$

iv) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) \quad \forall\, u, v, w \in V$

Todo espacio vectorial que tenga definida una distancia recibe el nombre de "Espacio Métrico".

Espacio Prehilbertiano

En este tipo de espacio se cumple la llamada Regla del Paralelogramo:

Sea $(V ,+, K , \cdot)$ e.v.e:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \qquad \forall\, u,v \in V$$

Observaciones:

-La definición de ortogonalidad de vectores es concordante con el concepto geométrico de perpendicularidad usual.

-El concepto de norma es compatible con nociones de la geometría elemental

-La distancia definida en términos de la norma, también compatibiliza con las nociones elementales de la geometría del plano

II.3.3.-Vector unitario-Versor de un vector

Sea $(V, +, K, \cdot)$ e.v.e y sea $u \in V$. Se denomina vector unitario a todo vector cuyo módulo es igual a la unidad.

$$u \in V\text{-}\{ 0_v \} \text{ es unitario} \Leftrightarrow \|u\| = 1$$

Sea $u \in V\text{-}\{ 0_v \}$, podemos construir el vector $\frac{1}{\|u\|}u$ que tiene la propiedad de ser paralelo al vector u y además es unitario. Esto es :

$$\left\| \frac{1}{\|u\|}u \right\| = \left| \frac{1}{\|u\|} \right| \|u\| = \frac{1}{\|u\|} \, \|u\| = 1$$

Definición: Al vector $\frac{1}{\|u\|}u$ le llamaremos *el versor del vector u*

<u>II.3.3.1.-Versores Fundamentales</u>

Sean los vectores $E_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con i =1,2, …,n

Definidos tales que todas sus componentes son nulas salvo la i-ésima componente que vale 1; así:

$$E_1 = (1, 0,\ldots, 0) \quad E_2 = (0, 1,\ldots, 0) \quad \ldots \quad E_n = (0, 0,\ldots, 1)$$

Estos vectores se denominan versores fundamentales del e.v.e. (IR^n. +, IR, ·) , coinciden con los ejes coordenados en IR^n y son unitarios

II.4.-Aplicaciones de la Teoría Vectorial a la Geometría y a la Trigonometría Planas

En el espacio (IR^n. +, IR, ·), dotado de las tres operaciones consideradas (adición, multiplicación por un escalar y producto escalar) es un espacio vectorial euclídeo de n dimensión. Las propiedades de este espacio permiten desarrollar los temas que a continuación se consideran:

<u>II.4.1-Desigualdad de Cauchy- Schwarz</u>

Sea V un espacio vectorial euclídeo

$$\forall\ u, v \in V:\ |u.v| \leq \|u\|\,\|v\|$$

Demostración:

i) Puede ocurrir que alguno de los vectores sea nulo

Si $u = 0_v \Rightarrow u.v = 0 \wedge \|u\| = 0$

Luego se satisface la igualdad $|u.v| = \|u\|\,\|v\|$

ii) Si $u \neq 0_v \wedge v \neq 0_v$, $\forall$ a,b $\in$ IR se verifica

a u + b v $\in$ V y además por propiedad de producto interior

$$(a\,u + b\,v)\mathbf{.}\,(a\,u + b\,v) \geq 0$$

Desarrollando el primer miembro, resulta:

$$a^2\,(u.\,u) + ab\,(u.v) + ab(u\,.v) + b^2\,(v.v) \geq 0$$

$$a^2\,(u.\,u) + 2ab\,(u.v) + b^2\,(v.v) \geq 0$$

haciendo a= v.v y b= - (u.v) se tiene

$$(v.v)^2\,(u.u) - 2(v.v)(u.v)^2 + (u.v)^2(v.v) \geq 0$$

$$(v.v)^2\,(u.u) - (v.v)(u.v)^2 \geq 0$$

Por definición de norma $\|u\| = \sqrt{u.u} \Rightarrow \|u\|^2 = u.u$, análogamente $\|v\|^4 = (v.v)^2$

Reemplazando en la expresión anterior:

$$\|v\|^4\|u\|^2 - \|v\|^2\,(u.v)^2 \geq 0 \quad (1)$$

Como $\|v\| \neq 0$,se puede multiplicar ambos miembros de (1) por $\dfrac{1}{\|v\|^2}$, y resulta

$$\frac{\|v\|^4\|u\|^2}{\|v\|^2} - \frac{\|v\|^2(u.v)^2}{\|v\|^2} \geq 0$$

$$\|v\|^2\|u\|^2 - (u.v)^2 \geq 0$$

$(u.v)^2 \leq \|v\|^2\|u\|^2$ luego teniendo en cuenta que el cuadrado de un numero real es igual al cuadrado de su valor absoluto

$$|u.v|^2 \leq \|v\|^2\|u\|^2$$

Y como las bases son no negativas resulta:

$|u.v| \leq \|v\|\,\|u\|$ que es lo que se quería probar

II.4.2-Desigualdad Triangular

Sean u y v vectores en IR^n. Entonces:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Además la igualdad vale si y solo si un vector es múltiplo no negativo del otro

Demostración:

$$\|u+v\|^2 = (u+v).(u+v) = u.u + u.v + v.u + v.v = u.u + 2u.v + v.v$$

Como $u.v \leq \|u.v\|$ entonces

$$\|u+v\|^2 \leq u.u + 2\|u.v\| + v.v$$

Por la desigualdad de Cauchy- Schwarz resulta:

$$\|u+v\|^2 \leq u.u + 2\|u\|\,\|v\| + v.v$$

O sea $\|u+v\|^2 \leq (\ \|u\| + \|v\|\ )^2$

Al tomar raíz cuadrada positiva se conserva la desigualdad y entonces

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Si $u = 0_v$, o $v = 0_v$ la proposición se cumple automáticamente, y se tiene una de las dos desigualdades triviales

$\|u\| = \|u\|$ (si $v = 0_v$) o $\|v\| = \|v\|$ (si $u = 0_v$) o aún 0 =0 (si $u = v = 0_v$)

En todos los casos algún vector es múltiplo nulo del otro.

Descartando estos casos , puede suponerse $u \neq 0_v$ y $v \neq 0_v$, si ocurre la igualdad

II.4.3.-Angulo entre dos vectores

Siendo u y v dos vectores no nulos de un e.v.e. entonces llamamos k al número real único tal que:

$$k = \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$$

Podemos demostrar que: $\exists!\ \alpha \in [0, \pi] : \cos\alpha = k$

Prueba:

-Por la desigualdad de Cauchy- Schwarz sabemos que:

$$|u.v| \leq \|u\|.\|v\|$$

-por definición de valor absoluto, tenemos.

$$-\|u\|.\|v\| \leq u.v \leq \|u\|.\|v\| \qquad (1)$$

-Como $u \neq 0_v$ y $v \neq 0_v$ podemos multiplicar los miembros (1) por $\frac{1}{\|u\|.\|v\|}$

$$\text{Resulta: } -\frac{\|u\|.\|v\|}{\|u\|.\|v\|} \leq \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|} \leq \frac{\|u\|.\|v\|}{\|u\|.\|v\|}$$

$$-1 \leq \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|} \leq 1$$

Luego $-1 \leq k \leq 1$

Esto nos indica que el numero k conseguido en base a esos vectores, es un numero entre -1 y 1 . Por lo tanto dado k $\exists\ \alpha \in$ IR: $k = \cos\alpha$

Sintetizando tenemos:

a) Dados $u,v \in V$, $u \neq 0_v$, $v \neq 0_v$ $\exists!\ k \in$ IR : $k = \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$

b) Dado $k \in IR : k = \dfrac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$, $\exists!\ \alpha \in [0, \pi] : \cos\alpha = k$

De a) y b) resulta:

Definición:

Dados $u,v \in V$, $u \neq 0_v$, $v \neq 0_v$, $\exists!\ \alpha \in [0, \pi]$:

$$\cos\alpha = \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$$

Llamaremos a α el ángulo entre los vectores u y v

Notas:a) Si u,v son paralelos u = cv con $c \neq 0$, luego tenemos que

$$\cos\alpha = \frac{u.v}{\|u\|.\|v\|} = \frac{cv.v}{\|cv\|.\|v\|} = \frac{c(v.v)}{\|cv\|.\|v\|} = \frac{c\|v\|^2}{|c|\,\|v\|.\|v\|} = \frac{c\|v\|^2}{|c|\,\|v\|.^2} = \frac{c}{|c|} \text{ de donde}$$

si c >0 $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

si c <0 $\cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$

b)Si u,v son ortogonales u.v = 0 entonces $\cos\alpha = \dfrac{u.v}{\|u\|.\|v\|} = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

c)La expresión $\cos\alpha = \dfrac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$ nos permite escribir $u.v = \|u\|\,\|v\|\cos\alpha$ la que expresa el producto escalar (interior) de dos vectores en función del ángulo formado por ellos

II.4.4.-Cosenos directores de un vector

Sea un vector $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in IR^n - \{0_v\}$ en el e.v.e (IR^n, +, IR, **.**) ,sea α_i el ángulo entre el vector *u* y E_i (versores fundamentales) con i = 1,2,…,n . Los cosenos directores del vector *u* son los cosenos de los ángulos que forma *u* con cada uno de los versores fundamentales

De acuerdo con la definición de ángulo entre dos vectores se debe satisfacer que:

$\forall$ i = 1,2,…,n $\cos\alpha_i = \dfrac{u.E_i}{\|u\|.\|E_i\|}$ o sea

$\forall$ i = 1,2,…,n $\cos\alpha_i = \dfrac{(u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_n)(0,0,...,1,...,0)}{\|u\|}$

$\forall$ i = 1,2,…,n $\cos\alpha_i = \dfrac{u_i}{\|u\|}$ o sea :

$$\cos\alpha_1 = \frac{u_1}{\|u\|}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{u_2}{\|u\|}, \quad \cos\alpha_3 = \frac{u_3}{\|u\|}, \ldots, \cos\alpha_n = \frac{u_n}{\|u\|}$$

Los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se denominan ángulos directores

Observaciones:

-Todo vector no nulo de IR^n puede expresarse del siguiente modo

$u = \|u\|$ $(\cos\alpha_1 , \cos\alpha_2 ,\ldots,\cos\alpha_n)$

-Todo vector unitario de IR^n tiene como componentes a sus cosenos directores

II.4.5.-Proposiciones

a.-La suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector es igual a la unidad.

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$$

Demostración: Como $\forall$ i = 1,2,…,n $\cos\alpha_i = \dfrac{u_i}{\|u\|}$ tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = \frac{u_1^2}{\|u\|^2} + \frac{u_2^2}{\|u\|^2} + \ldots + \frac{u_n^2}{\|u\|^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = \frac{1}{\|u\|^2} \left(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = \frac{1}{\|u\|^2} \|u\|^2 \qquad \text{luego} \qquad \sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$$

-Si particularizamos para IR^2 tenemos: $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 1$ (1)

Pero $\forall\, u \in IR^2$, los ángulos directores son complementarios , esto es :

$$\cos\alpha_1 = \operatorname{sen}\alpha_2 \quad \wedge \quad \operatorname{sen}\alpha_1 = \cos\alpha_2$$

luego remplazando en (1) tenemos:

$\operatorname{sen}^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2 = 1 \quad \wedge \quad \operatorname{sen}^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = 1 \qquad \forall\, \alpha_1 \wedge \alpha_2$

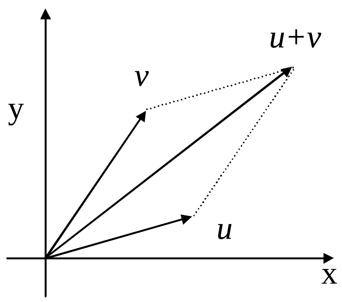
Comprobamos con esto que la proposición $\sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$ no es más que una generalización a IR^n de la conocida igualdad pitagórica $\operatorname{sen}^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = 1$

Tanto la desigualdad de Cauchy- Schwarz como la desigualdad triangular han sido probadas utilizando solamente recursos algebraicos a partir de las propiedades de producto interior (las cuales también se verifican algebraicamente). No se tomaron como recurso a ningún resultado geométrico, en particular a ninguna figura.
En lo que sigue se trabajara con resultados de la geometría elemental y también de la trigonometría.

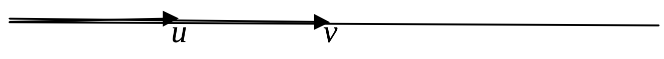
Damos otros dos ejemplos de relacionados a las aplicaciones de los espacios vectoriales reales, a saber:

b.-Desigualdad triangular

Sean u y v dos vectores del e.v.e. (IR^2 , +, IR, ·) o en el e.v.e.(IR^3 , +, IR, ·) representados por segmentos dirigidos como se indica en la figura

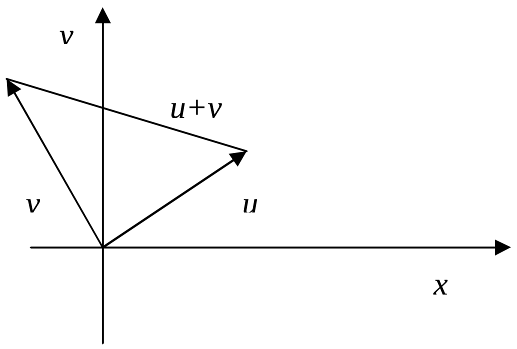


Entonces la desigualdad triangular $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ es una versión del teorema de la geometría elemental que expresa "en todo triangulo la suma de las longitudes de dos de los lados es mayor que la longitud del lado restante".
Si *u* y *v* son colineales, esto es que no forman ningún triangulo, se da la igualdad esto es: $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$, gráficamente :



c.-Teorema de Pitágoras

Por analogía con los vectores en el plano, podemos considerar *u+v* como la hipotenusa de un triangulo rectángulo determinado por los vectores *u* y *v* ortogonales entre sí.



Por la definición de producto interior y la ortogonalidad de *u* y *v* se tiene:

$$\|u+v\|^2 = (u+v).\ (u+v) = u^2 + u.v + u.v + v^2 =$$

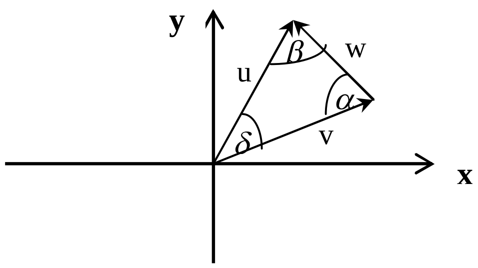
$$= u^2 + 2\, u.v + v^2 =$$

$$= \|u\|^2 + 2\ .0 + \|v\|^2 =$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2$$

d.- Teorema del coseno

Sean *u* , *v* , *w* vectores de . (IR^2, +, IR, **·),**α, β, δ los ángulos interiores de un triángulo de lados *u, v, w*, tales que α es ángulo formado por *v* y *w*, δ el formado por *u* y *v*,β el formado por *u* y *w*. Además $u = v+w$ o bien $w=u-v$



Tomemos el cuadrado de la norma de : $w= u-v$ resulta

$$\|w\|^2 = \|u-v\|^2 \Rightarrow \|w\|^2 = (u-v)(u-v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|w\|^2 = u.u - u.v - v.u + v.v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|w\|^2 = \|u\|^2 - 2\, u.v + \|v\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|w\|^2 = \|u\|^2 - 2\|u\|\,\|v\|\ \cos\delta + \|v\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\|\ \cos\delta$$

Si interpretamos a los módulos de los vectores dados por la norma, como la longitud de los lados del triangulo dado, esta última expresión nos dice:

En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de los mismos por el coseno del ángulo que ellos forman.

Luego se verifican las siguientes relaciones

$$\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\|\cos\delta$$
$$\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\,\|v\|\,\|w\|\cos\alpha$$
$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 - 2\|u\|\,\|w\|\cos\beta$$

II.5-Producto vectorial

II.5.1.-Definición y propiedades

Sea (IR^3, +, IR, **.**) e.v.e., sean *u* y *v* vectores no nulos que pertenecen a IR^3. Definimos una ley de composición interna llamada producto vectorial:

$\times : IR^3 \text{x } IR^3 \to IR^3$

$$(u,v) \mapsto u \times v \overset{\text{def}}{=} (u_1,u_2,u_3)\times(v_1,v_2,v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

-Si usamos los versores fundamentales de IR^3 : E_1=(1,0,0), E_2=(0,1,0), E_3=(0,0,1) en forma simbólica se puede expresar:

$$u \times v = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \det(E,u,v)$$

Donde E no es un vector de IR^3 sino un “vector simbólico” E=(E_1,E_2,E_3) en el que sus componentes son vectores de IR^3 , los versores fundamentales

Se puede operar con *u x v* en forma simbólica como si fuera un determinante ordinario verificándose:

1) $u \times v = \det(E,u,v)$ entonces $v \times u = \det(E,v,u)$

   Pero como $\det(E,u,v) = -\det(E,v,u)$ se deduce

   $u \times v = -\, v \times u$ propiedad anti conmutativa

2) $u \times u = 0_V$, aun si $u \neq 0_V$, pues

$$\det(E,u,u) = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = E_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} + E_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix} + E_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} =$$

$= 0\,E_1 + 0\,E_2 + 0\,E_3 = 0\,(1,0,0) + 0\,(0,1,0) + 0\,(0,0,1) = (0,0,0) = 0_v$

3) $u \times (v+w) = \det(E,u,v+w) = \det(E,u,v) + \det(E,u,w) =$

$= u \times v + u \times w$ (distributividad)

Propiedades:

1) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2 - (u.v)^2$

Demostración:

$\|u \times v\|^2 = \|(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)\|^2$

$= \left((u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\right)^2$

$= u_2^{\,2}v_3^{\,2} + u_3^{\,2}v_2^{\,2} - 2u_2v_3u_3v_2 + u_3^{\,2}v_1^{\,2} + u_1^{\,2}v_3^{\,2} -$

$- 2u_3v_1u_1v_3 + u_1^{\,2}v_2^{\,2} + u_2^{\,2}v_1^{\,2} - 2u_1v_2u_2v_1$

Haciendo cuentas y cancelando, esto es igual a

$= (u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2})(v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2}) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$

$= \|u\|^2\|v\|^2 - (u.v)^2$

2) $\|u \times v\| = \|u\|\,\|v\|\,\text{sen}\beta$ siendo β el ángulo entre u y v (geométricamente $\|u \times v\|$ es el área del paralelogramo definido por los vectores u y v)

Demostración:

Teniendo en cuenta la propiedad 1) llamada Identidad de Lagrange resulta:

$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2 - (u.v)^2$

y considerando que β es el ángulo entre u y v

$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2 - (\|u\|\,\|v\|\cos\beta)^2$

$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2 - \|u\|^2\,\|v\|^2\cos^2\beta$

$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2\,(1 - \cos^2\beta)$

$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2\,\text{sen}^2\beta$

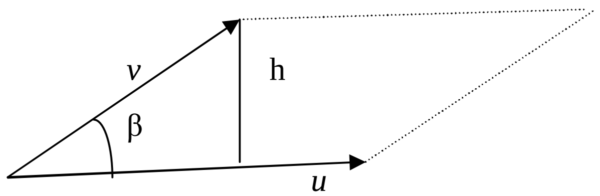
Como β es el ángulo entre u y v, $0 \le \beta \le \pi$, resulta $\text{sen}\beta \ge 0$ para todo β que verifique $0 \le \beta \le \pi$, en consecuencia

$\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \, \text{sen}\beta$

II.6.-Aplicaciones del Producto Vectorial a la Geometría Trigonometría Planas

II.6.1.-Área del Palelogramo

De acuerdo a las nociones elementales de geometría el área del paralelogramo de la figura es



Área = h $\|u\|$, pero h = $\|v\|$ senβ, resulta reemplazando

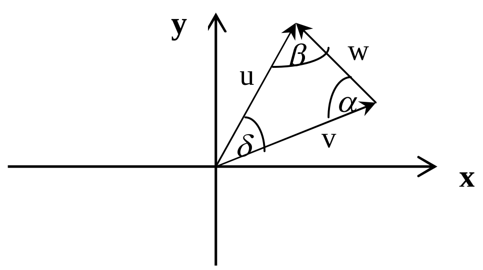
Área = $\|u\| \, \|v\| \, \text{sen}\beta = \|u \times v\|$

Nota:

El vector $u \times v$ de IR^3 verifica que: $u \times v \perp u$, y $u \times v \perp v$.

II.6.2.-Teorema del seno de un ángulo entre dos vectores

Sean ahora los vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ y $w = u - v = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$, como muestra la figura



Estos tres vectores son lados de un triángulo.

Probaremos que los módulos de los productos vectoriales que se obtienen multiplicando dos a dos estos vectores son iguales. Es decir:

$$\|w \times v\| = \|w \times u\| = \|v \times u\|$$

Prueba:

Teniendo en cuenta la definición de producto vectorial en término de las componentes de los vectores resulta

$\|w \times v\| = \|(u_1 - v_1, u_2 - v_2) \times (v_1, v_2)\| = (u_2 - v_2)v_1 - (u_1 - v_1)v_2 =$

$$= u_2\, v_1 - v_2\, v_1 - u_1\, v_2 + v_1\, v_2 =$$

$$= u_2\, v_1 - u_1\, v_2$$

Luego $\|w \times v\| = u_2\, v_1 - u_1\, v_2$

$\|w \times u\| = \|(u_1 - v_1, u_2 - v_2) \times (u_1, u_2)\| = (u_2 - v_2)u_1 - (u_1 - v_1)u_2 =$

$$= u_2\, u_1 - v_2\, u_1 - u_1\, u_2 + v_1\, u_2 =$$

$$= u_2\, v_1 - u_1\, v_2$$

Luego $\|w \times u\| = u_2\, v_1 - u_1\, v_2$

En forma análoga se llega a: $\|u \times v\| = u_2\, v_1 - u_1\, v_2$

Observamos que los resultados obtenidos son iguales en lo que respecta al modulo del vector. Esto es $\|w \times v\| = \|w \times u\| = \|v \times u\|$

Si estos productos vectoriales son iguales se verifica:

$\|w \times v\| = \|w\|\|v\| sen\beta$

$\|w \times u\| = \|w\|\|u\| sen\alpha$

$\|v \times u\| = \|v\|\|u\| sen\delta$

Es decir: $\|w\|\|v\| sen\beta = \|w\|\|u\| sen\alpha = \|v\|\|u\| sen\delta$

Por lo tanto como $u \neq 0_v$, $v \neq 0_v$ y $w \neq 0_v$,resulta

$$\frac{\|w\|\|v\| sen\beta}{\|w\|\|v\|\|u\|} = \frac{\|w\|\|u\| sen\alpha}{\|w\|\|u\|\|v\|} = \frac{\|v\|\|u\| sen\delta}{\|v\|\|u\|\|w\|}$$ simplificando tendremos:

$$\frac{sen\beta}{\|u\|} = \frac{sen\alpha}{\|v\|} = \frac{sen\delta}{\|w\|}$$

Si interpretamos $\|u\|, \|v\|, \|w\|$ como los módulos de los vectores de los lados de un triángulo, esta expresión nos dice que:

"En todo triángulo los senos de los ángulos interiores son proporcionales a los lados opuestos"

Esta propiedad es conocida con el nombre del *Teorema del seno*

II.7.Ejercicios de Aplicación

Resuelva los siguientes ejercicios

1) Sean u = (1, 2,-3) y v = (2, 1,-1) vectores de IR^3; pruebe que:

a) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

b) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u.v$

c) $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4u.v$

2) Sean u = (3,4) y v = (5,0) vectores de IR^2, descomponga el vector u en suma de dos u_1 y u_2 tales que $u_1 \parallel v$ y $u_2 \perp v$.

3) En cada uno de los siguientes casos, determine que pares de vectores son paralelos. P y A representan origen, Q y B extremos**.**

a) P= (1,-1) Q= (4,3); A = (-1,5) B = (7,1)

b) P= (1,4) Q= (-3,5); A = (5,7) B = (9,6)

c) P= (1,-5,5) Q= (-2, 3,-4); A = (3, 5,1) B = (-3, 9,-17)

4) Determine *k* de modo que los vectores sean ortogonales:

a) u= (k,1,-1) v= (2,0,4)

b) u= (2, k,-4,2) v= (0, 1, 3,4k)

5) Sea θ el ángulo entre dos vectores u y v. Si cosθ =1 y u= (x, 1) y v= (-1,1), encuentre el valor de x.

6) Encuentre el valor de x, dados los vectores y sus cosenos directores:

a) u= (3+x, 1, 1,3); sus cosenos directores son: 5/6; 1/6; 1/3; 1/6.

b) u= (4, 0, x); sus cosenos directores son: $2/\sqrt{13}$; 0; $3/\sqrt{13}$

7) Dados u = (1, 0,2); v = (3, 1,1); w = (-2, 1,0) y z = (-5, 8,-2). Compruebe que:

$$(2u) \times (v + w) = (v \times w) + (u \times w) + z$$

8) Dados u = (-1, 2,1); v = (2, 0,1); w = (0, 1,-2) y z = (3, 3,-3). Calcule:

a) (u x v).w   c) (u x w).v   e) (u.v)(w x v)

b) (u x v) x w   d) (v x u) x (-w)   f) (u x z).(w x u)

9) Encuentre los valores x_2 y x_3 para que (u x v) x (x) = 0, siendo:

u = (5,-1,3)   v = (-2, 0,1)   x = (2, x_2, x_3)

10) Determine el área del paralelogramo de lados u y v:

a) u = (1,0,2) ; v = (2,-1,1)

b) u = $E_1+E_2+E_3$; v = $3E_1+3E_2+3E_3$

11) Sean los vectores v_1 = (4, 2,-4); v_2 = (12, 6,4) de IR^3:

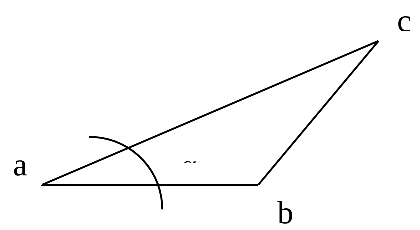
a) Encuentre los cosenos directores determinados por los vectores:

i) $v_1 - v_2$ ii) $v_2 - v_1$

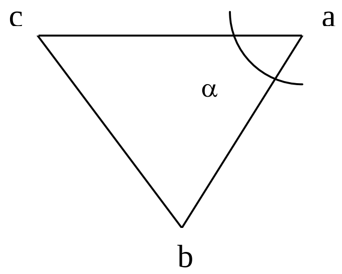
12) Sea el vector v = (v_1, v_2, v_3) de IR^3, tal que tenga como cosenos directores a $\cos\alpha=1/2$; $\cos\beta= 3/4$, y que $\|v\|= 8$: a) Halle el valor de $\cos\gamma$

b) Encuentre las componentes v_1, v_2, v_3

13) Del triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ conocemos los siguientes datos: $\alpha = \pi/6$; $\overline{ab}$ = 8cm y $\overline{ac}$ = 25cm. ¿Cuál es la longitud de $\overline{bc}$?



14) Calcule el lado $\overline{bc}$ del triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ sabiendo que α = 135º; $\overline{ab}$ = 20cm y $\overline{ac}$ = 25cm.



III.- APLICACIONES A LA GEOMETRIA ANALITICA LINEAL

El gran libro de la Naturaleza se encuentra abierto ante nuestros ojos y la verdadera filosofía está escrita en él…Pero no podemos leerlo a no ser que primero aprendamos el lenguaje y los caracteres con los cuales está escrito...Está escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas

Galileo Galilei

III.-Aplicaciones a la Geometria Analitica Lineal

III.1.-Ecuaciones de la recta.

Las cuestiones inherentes a rectas y vectores pueden generalizarse a IR^n, en particular a lo referente a la definición :

Sean A y B elementos de $(IR^2, +, IR, .)$ o de $(IR^3, +, IR, .)$

La recta que contiene al punto A y es paralela al vector B es el conjunto de puntos X que pueden expresarse como

$$X = A + t\,B\ ,\ t \in IR$$

Luego tenemos esta definición:

Definición 1:

Sean los espacios vectoriales euclídeos $(IR^2, +, IR, .)$ o $(IR^3, +, IR, .)$

P punto de IR^2 o IR^3; A vector no nulo, esto es $A \in IR^2-\{0_v\}$ o $A \in IR^3-\{0_v\}$

La recta que contiene al punto P y es paralela al vector A es el conjunto de puntos X que pueden expresarse como

$$X = P + t\,A\ ,\ t \in IR$$

Tomando a continuación esta definición en forma generalizada, resulta

Sea $(IR^n, +, IR, .)$ e.v.e., el punto $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de IR^n de y el vector $A = (a_1, a_2 \ldots a_n)$ de $IR^n-\{0_v\}$. Queremos determinar el conjunto R ,de puntos $X \in IR^n$,tal que los vectores X – P tengan la misma dirección que A, esto es, caracterizar el conjunto

$$R = \{X \in IR^n / X - P \parallel A\}.$$

La condición de paralelismo $X - P \parallel A$ equivale a decir que para cada punto $X \in IR^n$ existe un único valor de $t \in IR$ tal que X – P = t A, es decir:

$$R = \{X \in IR^n / X - P = t\,A\}.$$

Definición 2:

El conjunto R caracteriza a la recta que contiene al punto P y tiene la dirección del vector A.

Definición 3:

La expresión X - P = t A representa a los puntos de la ecuación vectorial de la recta R que contiene al punto P y es paralela al vector de dirección A

Debemos destacar la información del parámetro $t \in$ IR , mientras este parámetro asume todos los valores reales, X recorre todos los puntos de la recta "*R*"

A partir de la *ecuación vectorial de la recta* "*R*" podemos realizar el siguiente desarrollo:

De la ecuación vectorial $X - P = t\,.A\ \forall t \in IR$, resulta:

$(x_1, x_2 ... x_n) - (p_1, p_2 ... p_n) = t\ .\ (a_1, a_2 \ldots a_n)$ aplicando diferencia de n-uplas y producto de un escalar por una n-upla se tiene

$(x_1 - p_1, x_2 - p_2 \ldots x_n - p_n) = (ta_1, ta_2 \ldots ta_n)$ por igualdad de n-uplas se deduce un sistema de n ecuaciones con n incógnitas para $\forall t \in IR$

$$\begin{cases} x_1 - p_1 = ta_1 \\ x_2 - p_2 = ta_2 \\ . \\ . \\ x_n - p_n = ta_n \end{cases}$$

A este sistema obtenido lo identificamos con las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto P y es paralelo al vector A.

A partir de ellas, igualando el parámetro t, se puede determinar las ecuaciones cartesianas:

$$\frac{x_1 - p_1}{a_1} = \frac{x_2 - p_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n - p_n}{a_n}$$

Esta es la forma cartesiana de la ecuación de la recta que contiene al punto P y es paralelo al vector A.

Ejemplo1:

Trabajado con el e.v.e. (IR^2, +, IR, **.**) tendremos las distintas formas de la recta *R* que contiene al punto P y es paralela al vector de dirección A

A saber; sea $P = (x_0, y_0) \in IR^2$ y $A = (a_1, a_2) \in IR^2 - \{(0,0)\}$ del e.v.e. (IR^2, +, IR, **.**) la ecuación vectorial de la recta que contiene al punto P y tiene la misma dirección del vector A es :

La ecuación vectorial $X - P = t\,.A\ \forall t \in IR$

O sea: $(x, y) - (x_0, y_0) = t(a_1, a_2)$

Para determinar la ecuación cartesiana hagamos las siguientes consideraciones

a) $a_1 \neq 0 \quad y \quad a_2 \neq 0$, *y asi :*

$$\frac{x\text{-}x_0}{a_1} = t$$

$$\frac{y - y_0}{a_2} = t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x\text{-}x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

Esta es la ecuación cartesiana de la recta, que también puede escribirse :

$$y\text{-}y_0 = \frac{a_2}{a_1}(x - x_0)$$

Los cosenos directores de A son: $\cos\,\alpha_1 = \dfrac{a_1}{\|A\|}$; $\cos\,\alpha_2 = \dfrac{a_2}{\|A\|}$, $A \in \mathrm{IR}^2 - \{(0,0)\}$

De aquí se obtienen los números directores $a_1 = \|A\| \cos\,\alpha_1$; $a_2 = \|A\| \cos\,\alpha_2$

Sustituyendo los valores de a_1 *y* a_2 en la ecuación de la recta tendremos:

$$y\text{-}y_0 = \frac{\|A\| \cos\,\alpha_2}{\|A\| \cos\,\alpha_1}(x - x_0) \ ,$$

como α_1 y α_2 son complementarios,

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1, \text{entonces } \cos\alpha_2 = sen\,\alpha_1 \text{ resulta}$$

$$y - y_0 = \frac{sen\,\alpha_1}{\cos\,\alpha_1}(x - x_0) \text{ o sea :}$$

$$y\text{-}y_0 = tg\,\alpha_1 (x - x_0)$$

Denotando el número real tgα_1 como m = tg α_1 , la ecuación cartesiana de la recta resulta $y - y_o = m\,(x - x_o)$ donde "m" se llama pendiente o coeficiente angular de la recta, el cual brinda información acerca del ángulo que la recta forma con la dirección positiva del eje $\overrightarrow{ox}$.

Se pueden analizar las siguientes situaciones:

- En caso de ser a_2=0, $\cos\,\alpha_2 = \dfrac{a_2}{\|A\|}$ entonces cos α_2=0, luego sen$\alpha_1 = 0$ y m= tg α_1=0 lo que caracteriza a las rectas paralelas al eje $\overrightarrow{ox}$

- Si es a_1=0 no se puede hablar de pendiente de la recta.

b) $a_1 \neq 0 \wedge a_2 = 0$ la ecuación $(x, y) - (x_0, y_0) = t(a_1, a_2)$ resulta

$$\begin{cases} x\text{-}x_0 = ta_1 \\ y - y_0 = t\,0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 \end{cases}$$

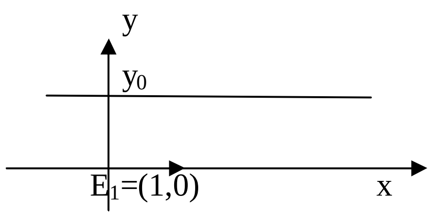
Analizando estas ecuaciones concluimos que:

$\forall$ t $\in$ IR, x asume un valor real tal que x varia en el conjunto de los números reales mientras que y permanece constante e igual a y_o

En consecuencia la ecuación que caracteriza a esta recta es $y = y_o$

Observamos que la pendiente es nula, puesto que el ángulo que forma el vector A $=(a_1, a_2)$ con $a_2=0$, con el versor $E_1 =(1, 0)$ es $\alpha_1 = 0$. Entonces tgα_1 = tg 0 = 0.

Resulta entonces que la recta de ecuación $y = y_o$ es paralela al eje $\overrightarrow{ox}$.

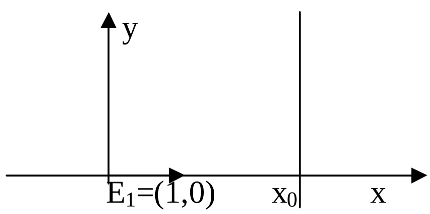


c) $a_1 = 0 \quad y \quad a_2 \neq 0$

$$\begin{cases} x - x_0 = t.0 \\ y - y_0 = t.a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases}$$

El análisis es igual al caso anterior y se tiene que la ecuación de la recta es $x = x_o$

Observemos que en este caso no podemos hablar de pendiente ya que el ángulo entre el vector A $=(a_1, a_2)$ con $a_1=0$, y el versor $E_1 =(1, 0)$, es $\frac{\pi}{2}$ y la tg$\frac{\pi}{2}$ no esta definida



Ejemplo 2:

Sea $P = (x_0, y_0, z_0) \in IR^3$ y $A = (a_1, a_2, a_3) \in IR^3 - \{ 0_3 \}$ la ecuación vectorial de la recta que contiene al punto P y es paralela al vector A es:

$(x,y,z,)-(x_0,y_0,z_0)=t(a_1,a_2,a_3)$

luego :

$\begin{cases} x\text{-}x_0 = ta_1 \\ y-y_0 = ta_2 \\ z-z_0 = ta_3 \end{cases}$ Estas son las tres ecuaciones paramétricas de la recta

Para determinar las ecuaciones cartesianas hagamos las siguientes consideraciones:

a) si $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ y $a_3 \neq 0$ las ecuaciones cartesianas son

$\frac{x\text{-}x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ Donde a_1, a_2 y a_3 son los números directores de la recta ,

podemos expresar asimismo las igualdades

$$\begin{cases} \dfrac{x\text{-}x_0}{a_1} = \dfrac{y\text{-}y_0}{a_2} \\ \dfrac{y\text{-}y_0}{a_2} = \dfrac{z\text{-}z_0}{a_3} \end{cases}$$

b) Si $a_1 \neq 0 \quad a_2 \neq 0 \quad$ y $\quad a_3 = 0,$ tendremos :

$$\begin{cases} \dfrac{x\text{-}x_0}{a_1} = \dfrac{y\text{-}y_0}{a_2} \\ z = z_0 \end{cases}$$

Recta paralela al plano xy

c) Si $a_1 \neq 0, a_2 = 0$ y $a_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t\,a_1 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$

Dado que x toma todos los valores reales (cuando t recorre IR) las ecuaciones que definen la recta en este caso son

$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$ se trata de una recta paralela al eje $\overrightarrow{ox}$

III.1.1.-Ecuación de la recta determinada por dos puntos dados.

Sea P = (p_1, p_2...p_n) y Q = (q_1, q_2...q_n) puntos del e.v.e. (IR^n, +, IR, **.**) se desea determinar la ecuación de la recta que contiene a dichos puntos, esto es obtener el conjunto de todos los puntos X pertenecientes a IR^n tales que X-P $\parallel$ P-Q, en símbolos:

$$R = \{X \in IR^n \,/\, X\text{-}P \parallel P\text{-}Q\}$$

La ecuación vectorial es:

X-P || Q-P $\Leftrightarrow$ X-P = t (P-Q), $\forall$ t $\in$ IR

Desarrollando la ecuación y realizando los algoritmos correspondientes llegamos a

$$(x_1,x_2,...,x_n)-(p_1.p_2,....,p_n)=t[(p_1,...,p_n)-(q_1,..,q_n)] \text{ tal que}$$
$$(x_1-p_1,....,x_n-p_n)=[t(p_1-q_1),t(p_2-q_2),...,t(p_n-q_n)]$$

$$\begin{cases} x_1-p_1=t(p_1-q_1) \\ x_2-p_2=t(p_2-q_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n-p_n=t(p_n-q_n) \end{cases}$$

Estas son las n ecuaciones paramétricas de la recta *R*

Despejando t de cada una e igualando resultan las ecuaciones cartesianas

$$\frac{x_1-p_1}{p_1-q_1}=\frac{x_2-p_2}{p_2-q_2}=...=\frac{x_n-p_n}{p_n-q_n}$$

Ejemplo:

Sean P = (p_1, p_2) y Q = (q_1, q_2) puntos del e.v.e. (IR^2, +, IR, **.**), tal que P $\neq$ Q la ecuación vectorial de la recta que contiene a los puntos P y Q es:

X – P = t (Q-P) o bien

$$(x,y)-(p_1,p_2)=t\,[(p_1,p_2)-(q_1,q_2)]$$
$$(x-p_1,y-p_2)=[t\,(p_1-q_1,p_2-q_2)]$$

$$\begin{cases} x-p_1=t\,(p_1-q_1) & (1) \\ y-p_2=t\,(p_2-q_2) & (2) \end{cases}$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a los puntos P y Q

Para obtener la ecuación cartesiana debemos tener en cuenta las componentes del vector P-Q

i) $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$ despejando t se obtiene la ecuacion cartesiana

de (1) $t=\dfrac{x-p_1}{p_1-q_1}$ y (2) $t=\dfrac{y-p_2}{p_2-q_2}$ $\Rightarrow$

$$\frac{x-p_1}{p\ -q_1}=\frac{y-p_2}{p_2-q_2} \quad \text{o sea} \quad y-p_2=\frac{p_2-q_2}{p_1-q_1}(x-p_1)$$

donde $m=\dfrac{p_2-q_2}{p_1-q_1}$

m es la pendiente de la recta que contiene a los puntos P y Q *ii)* $p_1 = q_1 \quad \wedge \quad p_2 \neq q_2$ la ecuación cartesiana resulta ser $x = p_1$, se trata de una recta paralela al eje $\overrightarrow{oy}$ y por lo tanto carece de sentido hablar de pendiente de la recta

iii) $p_1 \neq q_1 \quad \wedge \quad p_2 = q_2$ la ecuación cartesiana es $y = p_2$, por lo que se trata de una recta paralela al eje $\overrightarrow{ox}$ de pendiente cero

III.1.2.-Paralelismo

En el e.v.e. (IR^n, +, IR, **.**) ,sean:

P = ($p_1, p_2 ... p_n$) y Q = ($q_1, q_2 ... q_n$) puntos de IR^n ,$A \in IR^n - \{0_n\}$ $B \in IR^n - \{0_n\}$ vectores y las ecuaciones paramétricas de las rectas R_1 y R_2 se expresan por

R_1*: X -P = tA* $\qquad\qquad$ R_2*: X - Q = tB*

La recta R_1 es paralela a la recta R_2 si y solo si $\exists$ c $\in$ IR-{0} que verifique la igualdad $R_1 = c\, R_2$

Es decir: $R_1 // R_2 \Leftrightarrow \exists c \in$ IR-{0}: $R_1 = c\, R_2$

Para estudiar la relación entre las pendientes de las rectas R_1 y R_2, consideremos el e.v.e. (IR^2, +, IR, **.**) .entonces sean las rectas:

R_1: $(x,y) - (p_1,p_2) = t\,(a_1,a_2)$

R_2: $(x,y) - (q_1,q_2) = t(b_1,b_2)$

tales que $R_1 // R_2$ luego por las condiciones de paralelismo se tiene que (a_1,a_2) = c (b_1,b_2) con c $\in$ IR-{0} $\qquad$ (1)

Supongamos adicionalmente que:

i) $a_1 \neq 0$ (2)

de (1) y (2) se tiene

$$(a_1,a_2) = c\,(b_1,b_2) \Rightarrow a_1 = c\, b_1 \wedge a_2 = c\, b_2 \Rightarrow c = \frac{a_1}{b_1} \wedge c = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad (3)$$

Si los ángulos α_1, α_2,son los ángulos directores del vector A o sea de la recta R_1 y β_1, β_2 los ángulos directores del vector B o sea de la recta R_2 , las pendientes de dichas rectas

son : $m_1 = \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{sen\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \dfrac{\frac{a_2}{\|A\|}}{\frac{a_1}{\|A\|}} = \dfrac{a_2}{a_1}$

$$m_2 = \operatorname{tg} \beta = \frac{sen\beta_1}{\cos\beta_1} = \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} = \frac{\dfrac{b_2}{\|B\|}}{\dfrac{b_1}{\|B\|}} = \frac{b_2}{b_1}$$

Teniendo en cuenta la expresión (3) se tiene $\mathbf{m_1 = m_2}$

ii) $a_1 = 0$

En este caso tanto la recta R_1 como la recta R_2 la pendiente no está definida puesto que el ángulo que forma cada una de ellas con la dirección positiva del eje $\overrightarrow{ox}$ es $\frac{\pi}{2}$, pero resultan ser igualmente paralelas

<u>III.1.3.-Ortogonalidad</u>

En el e.v.e. (IR^n, +, IR, **.**) ,sean:

P = ($p_1, p_2...p_n$) y Q = ($q_1, q_2...q_n$) puntos de IR^n ,A$\in IR^n-\{0_n\}$ B$\in IR^n-\{0_n\}$ vectores y las ecuaciones paramétricas de las rectas R_1 y R_2 que se expresan por

$R_1: X - P = tA$ $\qquad\qquad$ $R_2: X - Q = tB$

La recta R_1 es ortogonal a la recta R_2 si y solo si el producto interior entre los vectores A y B es nulo. Esto es simbólicamente:

R_1 es ortogonal a $R_2 \Leftrightarrow R_1 .R_2=0$

Para ver la relación entre sus pendientes consideremos el e.v.e. (IR^2, +, IR, **.**). Sean las rectas: R_1 y R_2 . las ecuaciones vectoriales de cada una de ellas se expresa como:

$R_1: (x,y) - (p_1,p_2) = t\,(a_1,a_2)$

$R_2: (x,y) - (q_1,q_2) = t(b_1,b_2)$

Tales que $R_1 \perp R_2$

Donde P $\in IR^2$,Q$\in IR^2$, A$\in IR^2-\{0_2\}$, B$\in IR^2-\{0_2\}$

Luego por la definición de ortogonalidad, tenemos $R_1 .R_2=0$ Esto es:

$(a_1,a_2)\,(b_1,b_2) = a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ (1)

Supongamos además que:

i) $a_1 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$ (2)

de (1) y (2) tenemos dividiendo (1) por a_1b_1

$1 + \frac{a_2b_2}{a_1b_1} = 0$ o bien $\frac{a_2b_2}{a_1b_1} = -1$ (3)

Como $\frac{a_2}{a_1}$ es la pendiente de R_1 y $\frac{b_2}{b_1}$ es la pendiente de R_2 , la relación (3) es la relación entre las pendientes de dos rectas ortogonales

$\frac{a_2}{a_1} = -\frac{b_1}{b_2}$ o bien $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

ii) Si $a_1 = 0$,en este caso debe ocurrir que $b_2 = 0$ esto es teniendo en cuenta (1), lo que nos indica que la pendiente de la recta R_2 es $m_2 = 0$, y la recta R_1 no tiene pendiente

III.2.-Ecuación del plano

Sea (IR^n, +, IR, .) e.v.e., el punto $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de IR^n y el vector $A = (a_1, a_2 \ldots a_n)$ de $IR^n - \{0_n\}$. Caracterizaremos al conjunto P formado por todos los vectores $X \in IR^n$, tales que $X - P$ sea ortogonal al vector A, esto es determinar una condición que cumplan todos los vectores del conjunto

$$P = \{X \in IR^n / X - P \perp A\}$$

De la condición $X - P \perp A$ se llega a que $(X - P).\ A = 0$

Definición: La expresión $(X - P).\ A = 0$ le llamaremos **Ecuación vectorial del plano que contiene al punto P y es ortogonal al vector de dirección A**

Desarrollando la ecuación vectorial $(X - P).\ A = 0$, resulta:

$[(x_1, x_2 \ldots x_n) - (p_1, p_2 \ldots p_n)].\ (a_1, a_2 \ldots a_n) = 0$

$(x_1, x_2 \ldots x_n)\ (a_1, a_2 \ldots a_n) - (p_1, p_2 \ldots p_n)\ (a_1, a_2 \ldots a_n) = 0$

$(x_1\, a_1 + x_2\, a_2 + \ldots + x_n\, a_n) - (p_1\, a_1 + p_2\, a_2 + \ldots + p_n\, a_n) = 0$

considerando $d = -(p_1\, a_1 + p_2\, a_2 + \ldots + p_n\, a_n)$ la expresión anterior queda:

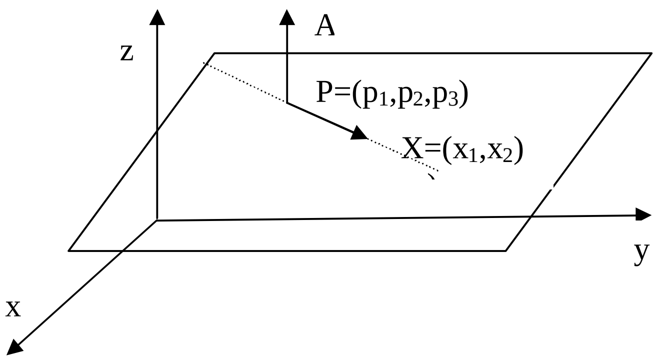
$\mathbf{x_1\, a_1 + x_2\, a_2 + \ldots + x_n\, a_n + d = 0}$ **Ecuación cartesiana del plano que contiene al punto P y es ortogonal al vector de dirección A**

Notas:

- Observemos que $d = -(P \cdot A)$
- El número real d indica si el plano contiene o no al origen del sistema de coordenadas pues si d=0 el vector nulo satisface la ecuación, por lo tanto el vector nulo pertenece al plano; en cambio si $d \neq 0$ el vector nulo no satisface la ecuación en consecuencia no pertenece al plano

III.2.1.-Plano en el espacio (IR^3,+, IR, ·)

Se puede obtener la ecuación de un plano π en el espacio (IR^3,+, IR, ·) especificando un punto en dicho plano y un vector A $\in$ IR^3-{0_3} perpendicular a todos los vectores en el plano π



Definición: Sea P un punto del espacio y A un vector distinto del vector nulo.
El conjunto de puntos X para los que (X-P) $\perp$ A constituye un plano π de IR^3.

Este conjunto puede simbolizarse asi:

$$P= \{X \in IR^3 / X-P \perp A\}$$

La condición (X-P) $\perp$ A lleva a la expresión (X – P). A = 0 que representa la ecuación vectorial del plano π

Desarrollando este producto (X – P). A = 0 obtenemos:

$[(x_1, x_2, x_3) – (p_1, p_2, p_3)]\cdot (a_1, a_2, a_3) = 0$

$(x_1-p_1, x_2-p_2, x_3-p_3)\cdot (a_1, a_2, a_3) = 0$

$a_1(x_1-p_1)+ a_2(x_2-p_2)+ a_3(x_3-p_3) = 0$

$a_1x_1- a_1p_1+ a_2x_2 - a_2p_2 + a_3x_3 - a_3p_3 = 0$

$a_1x_1+ a_2x_2 + a_3x_3 – (a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) = 0$

$\mathbf{a_1x_1+ a_2x_2 + a_3x_3 + d = 0}$

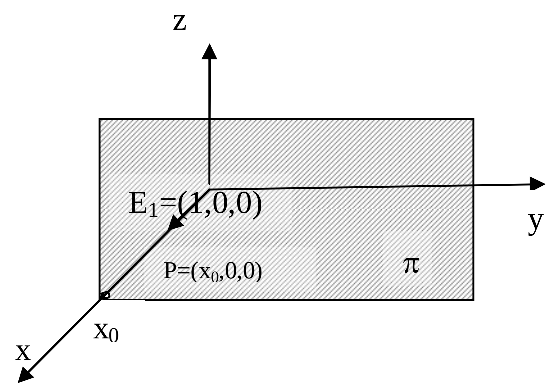
Observación: La ecuación del plano es una ecuación algebraica racional entera de primer grado en tres variables. Los coeficientes de las variables son las componentes de un vector perpendicular al plano

III.2.2.-Método para graficar planos en el e.v.e. (IR^3,+, IR, ·)

Para graficar planos en IR^3 debemos tener en cuenta dos situaciones diferentes:

a) El plano es paralelo a un plano coordenado:

i) Consideremos un plano π paralelo al plano "yz"



Este plano contiene al punto ubicado sobre el eje "x" de coordenadas P=(x_0 , 0, 0). Cualquier vector sobre el eje x es perpendicular al plano π, y en particular , el versor fundamental E_1=(1, 0 ,0).

Con estos datos la ecuación vectorial del plano es (X – P). E_1 = 0 desarrollando se tiene:

$$[(x, y, z) - (x_0, 0 ,0)] . (1, 0, 0) = 0$$

$$(x - x_0 , y-0, z-0) . (1, 0, 0) = 0$$

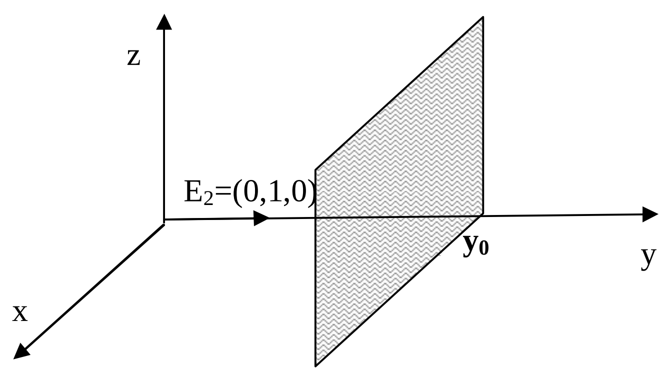
$$(x - x_0) 1+(y-0) 0+(z-0) 0 = 0$$

$$(x - x_0) = 0 \Rightarrow x = x_0$$

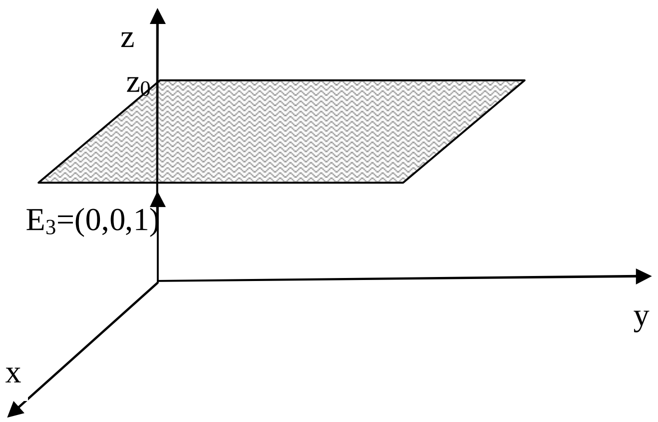
Es la ecuación del plano paralelo al plano "yz" que contiene al punto P=(x_0 , 0, 0)

De idéntica manera se obtienen:

ii) La ecuación y = y_0 que representa al plano paralelo al plano "xz" que contiene al punto P=(0, y_0, 0)



iii) La ecuación $z = z_0$ que representa la ecuación del plano paralelo al plano "xy" que contiene al punto $P=(0, 0, z_0)$



b) El plano corta a cada eje coordenado:

Supongamos que la ecuación del plano es:

$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + d = 0}$ con a_1, a_2, a_3 y d distintos de cero .

Su intersección con el eje x es el punto : $(-\frac{d}{a_1}, 0, 0)$

Su intersección con el eje y es el punto : $(0, -\frac{d}{a_2}, 0)$

Su intersección con el eje z es el punto : $(0, 0, -\frac{d}{a_3})$

De aquí se sigue:

Para graficar el plano se procede a través de los siguientes pasos:

i) Se marcan los tres puntos de intersección

ii) Se unen los tres puntos de intersección para formar un triángulo

III.2.3.-Situaciones Particulares:

A partir de la ecuación cartesiana del plano

$a_1 x + a_2 y + a_3 z + d = 0$ con $X=(x, y, z)$

Se pueden estudiar las siguientes situaciones particulares:

a) $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ y $d \neq 0$

en este caso la ecuación $a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z + d = 0$ representa un plano que no contiene al origen del sistema de coordenadas , pues el vector nulo de IR^3 ,O=(0,0,0) no satisface la ecuación de dicho plano

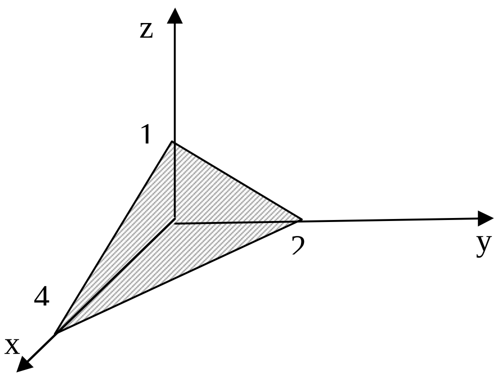
Ejemplo: Dibujar el plano de ecuación x + 2y + 4z – 4 = 0

Se obtienen las intersecciones con los ejes coordenados que se denominan trazas del plano, esto es:

$$Traza\ \begin{cases} x = 0 \\ 2y + 4z = 4 \end{cases} \qquad recta\ de\ ecuación \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y}{2} + z = 1 \end{cases}$$

$$Traza\ \begin{cases} y = 0 \\ x + 4z = 4 \end{cases} \qquad recta\ de\ ecuación \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x}{4} + z = 1 \end{cases}$$

$$Traza\ \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \qquad recta\ de\ ecuación \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

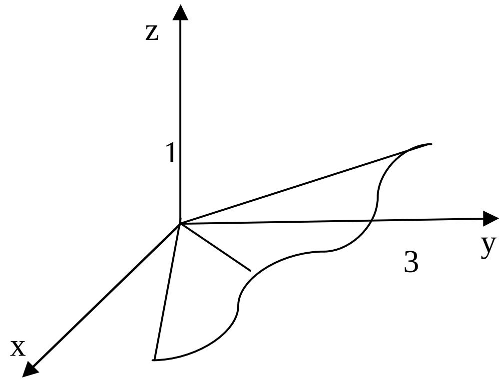


b) Si $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ y d = 0, la ecuación
$a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z = 0$ es la de un plano que contiene al origen de sistemas de coordenadas pues el vector O=(0,0,0) verifica la ecuación

Ejemplo: Dibujar el plano de ecuación x - y + 3z = 0

$$Trazas: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = -3z \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

(Al ser d=0 los vectores P y A resultan ortogonales)

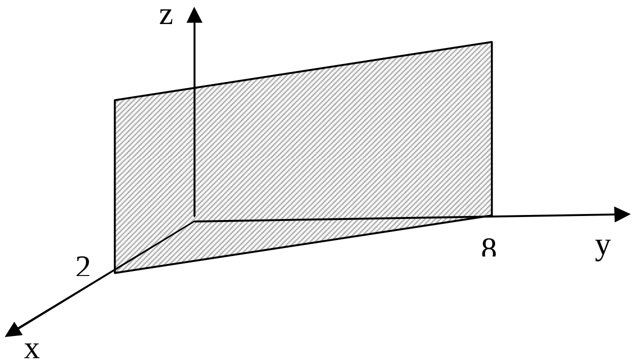


c) Si $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$ y $d \neq 0$

en este caso la ecuación $a_1 x + a_2 y + d = 0$ representa un plano paralelo al eje z, puesto que si el punto (x_1, y_1, z_1) satisface a la ecuación del plano, también lo harán todos los puntos del conjunto $\{(x_1, y_1, z) \ / \ z \in IR\}$ que es una recta paralela al eje z,de modo que el plano de ecuación $a_1 x + a_2 y + d = 0$ contiene a esa recta, entonces el plano resulta ser paralelo al eje z

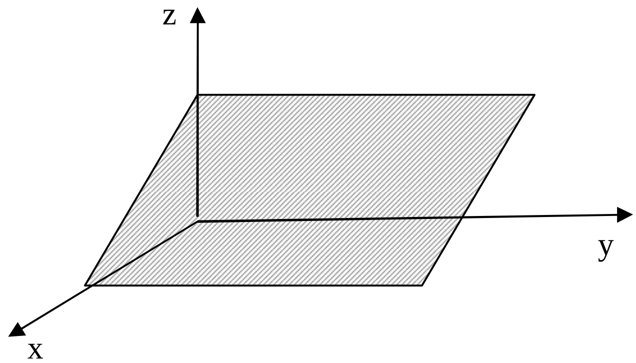
Ejemplo: Dibujar el plano de ecuación: $4x + y - 8 = 0$

$$Trazas: \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{8} = 1 \end{cases}$$



d) Si $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$ y $d \neq 0$

la ecuación $a_1 x + a_3 z + d = 0$ representa un plano paralelo al eje y

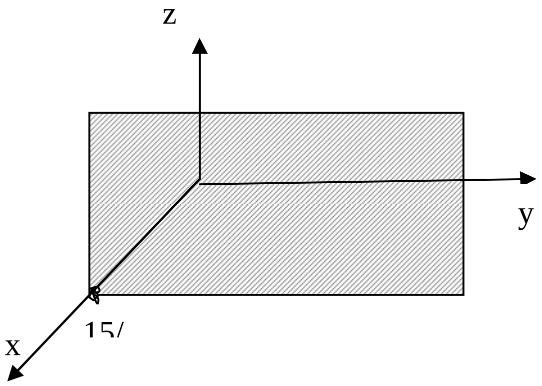


e) $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ y $d \neq 0$

la ecuación $a_1 x + d = 0$ representa un plano paralelo al plano yz

Ejemplo: Dibujar el plano de ecuación: $4x - 15 = 0$

$$Trazas: \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{15}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ x = \dfrac{15}{4} \end{cases}$$



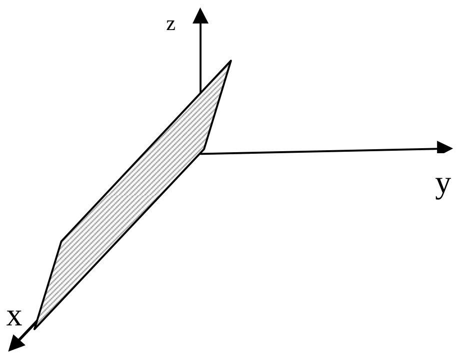
f) Si $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ y $d = 0$

la ecuación del plano $a_2 y + a_3 z = 0$ representa un plano paralelo al eje x que contiene al origen de coordenadas

Ejemplo: Dibujar el plano de ecuación: $3y - 2z = 0$

$$Trazas: \begin{cases} x = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2}{3} z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



III.2.4.-Plano que pasa por tres puntos no alineados

Sea (IR^3,+, IR, ·) e.v.e., queremos encontrar la ecuación del plano que contiene a los puntos P_1, P_2 y P_3 no alineados.

$P_1 = (x_1, x_2, x_3)$

$P_2 = (x'_1, x'_2, x'_3)$

$P_3 = (x''_1, x''_2, x''_3)$

Si los puntos pertenecen al plano π, entonces dichos puntos satisfacen a la ecuación de ese plano. Esto es:

$$P_1 \in \pi \Rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$$

$$P_2 \in \pi \Rightarrow a_1x_1^{'} + a_2x_2^{'} + a_3x_3^{'} = d$$

$$P_3 \in \pi \Rightarrow a_1x_1^{''} + a_2x_2^{''} + a_3x_3^{''} = d$$

Por lo que resulta el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d \\ a_1x_1^{'} + a_2x_2^{'} + a_3x_3^{'} = d \\ a_1x_1^{''} + a_2x_2^{''} + a_3x_3^{''} = d \end{cases}$$

Resolviendo este sistema tendremos la ecuación del plano requerida .

También podemos encontrar la ecuación de este plano aplicando la teoría de vectores:

Recordemos que la ecuación del plano que pasa por el punto P y es ortogonal al vector A es: (X-P)· A=0

Para determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos P_1, P_2 y P_3 no alineados, podemos considerar el plano que pasa por el punto P_1 , debemos determinar un vector que sea ortogonal a dicho plano, o sea un vector ortogonal al vector X - P_1 .Sabemos que el producto vectorial entre dos vectores es un vector perpendicular al plano formado por estos vectores. Esto es: consideremos los vectores $P_2 - P_1$ y $P_3 - P_1$, su producto vectorial $(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)$ es un vector perpendicular al plano formado por ellos, como el vector (X - P_1) también se encuentra en este plano, la ecuación del plano que pasa por P_1 y es perpendicular al vector $(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)$ es:

$$\mathbf{(X - P_1) . [(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)] = 0}$$

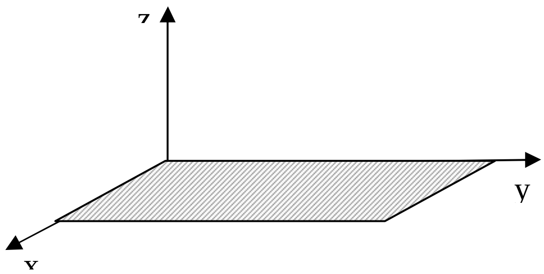
Esta es la ecuación del plano que pasa por los tres puntos P_1, P_2 y P_3 no alineados

III.2.5.-Los planos coordenados xy, xz, yz

El plano xy pasa por el origen de coordenadas y cualquier vector sobre el eje z es perpendicular a él. En particular el versor fundamental $E_3 = (0, 0, 1)$ es un vector perpendicular al plano

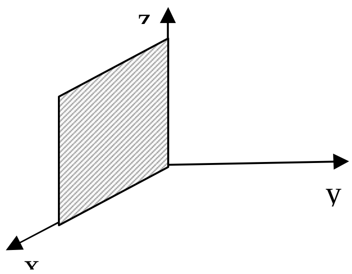
La condición z =0 caracteriza a los puntos del plano [xoy]

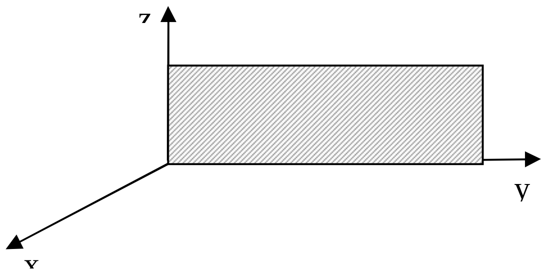
$$[xoy] = \{P \in IR^3 \ / \ z = 0\}$$



Análogamente obtenemos los planos xz e yz

$[xoz] = \{P \in IR^3 \ / \ y = 0\}$ $[yoz] = \{P \in IR^3 \ / \ x = 0\}$





III.3.-Ejercicios de Aplicación

1) Halle las ecuaciones vectorial, paramétrica y cartesiana de la recta que contiene al punto P y es paralela al vector A. Determine si el punto Q pertenece a dicha recta en cada caso.

a) P= (2,3); A= (4, -2) ; Q= (0,4)

b) P= (0, 0, 0) ; A= (0,1,1) ; Q= (0,-7,-7)

2) Dados los puntos p_1=(1,2) y p_2=(3,-1) determine:

a) La ecuación vectorial de la recta que contiene a p_1 y p_2.

b) Los puntos correspondientes a los siguientes valores del parámetro t:

t=0; t=1; t=-1; t=3; t= $\frac{1}{2}$

3) Halle la ecuación de la recta que contiene al punto de intersección de las rectas 3x – 5y +9 =0 y 4x + 7y -28 =0 y que pase por el punto p= (-3,-5).

4) Dado el triángulo de vértices A= (-2,1); B= (5,4) y C=(2,-3); encuentre:

a) la ecuación de la recta que al punto B y es paralela al lado opuesto AC.

b) Verifique que la recta que contiene a los puntos A y C es paralela a la recta de ecuación: $\frac{x-1}{-8}=\frac{y-3}{8}$

5) Halle la ecuación de la recta que contiene al punto (1,-2,2) y cuyos ángulos de dirección son $\pi/3$; $2\pi/3$; $\pi/4$.

6) Halle la ecuación de la recta (en todas sus formas) que pasa por el punto de intersección de las rectas x-2y +3 = 0 ; 2x + y -1 = 0 y es paralela a la recta de ecuación: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}$ y representarla gráficamente.

7) Dados P=(1,0) ; Q=(-1,2); $\vec{u}=(1,-1)$; $\vec{v}=(3,-2)$. Hallar las ecuaciones de las siguientes rectas en todas sus formas y dibujarlas.

a) Recta que pasa por P y tiene como vector director a $2\vec{u}$

b) Recta que pasa por P y tiene como vector director $\vec{u}+\vec{v}$

c) Recta que pasa por Q y tiene como vector director $\vec{u}-2\vec{v}$

8) Determine la ecuación vectorial y cartesiana del plano que contiene a P y es ortogonal a A.

a) P= (2,-3,-1); A= (-1, 2, 3)

b) P= (1,-2,3); A= (2, 1, 2)

9) Halle la ecuación del plano que contiene al punto P_0= (5,-1,1) y es perpendicular a la recta que contiene a los puntos A= (3,-1,2) y B = (5,0,-3).

10) Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto P= (-1,3,2) y es perpendicular a la recta $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$

11) Determine la ecuación vectorial y cartesiana del plano que contiene a P, Q, R:

a)P=(2,3,1) ; Q=(1,1,4) ; R=(-3,4,-2)

b)P=(1,1,1) ; Q=(0,0,0) ; R=(2,0,0)

12) Dados P= (1,2,3) ; Q=(-1,-2,-3) , R=(0,1,-1) y $\vec{u}=(0,1,-1)$ $\vec{v}=(5,1,2)$. Hallar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de los siguientes planos:

a) plano que pasa por P, Q, R.

b) plano que pasa por R y es perpendicular a $\vec{u}$

c) plano que contiene a Q y es perpendicular a $\vec{v}$

13) Dibuje las trazas de los planos cuyas ecuaciones se dan:

a) x + 2y +4z =0 c)4x +y -8 =0 e)3y + 2z =6

b)4x + 3y +z =6 d)2x +z =4 f)4x -15 =0

IV.- LAS CÓNICAS

"Conserva celosamente tu derecho a reflexionar, porque incluso el hecho de pensar erróneamente es mejor que no pensar en absoluto".

Hipatia de Alejandría
(370-415)

IV.-Las Cónicas

IV.1.-Breve Reseña Histórica sobre las Cónicas

1.- *Las cónicas de Menecmo y el problema de la Duplicación del Cubo.*

Se atribuye a Menecmo (375 a,.C) de la Academia platónica, fue preceptor de Alejandro Magno, y es autor de la célebre frase "No hay caminos reales para la geometría" ante una pregunta que le hace Alejandro Magno sobre como introducirse en forma fácil a la geometría , con el aparece el descubrimiento de las curvas que más tarde recibieron el nombre de elipse, parábola e hipérbola, la llamada "triada de Menecmo".

Este feliz hallazgo está relacionado al estudio de la resolución del problema "duplicación del cubo" (construir un cubo de doble volumen que otro dado). Redujo el problema al de la construcción de las dos medias proporcionales entre 2 y 1. En el lenguaje algebraico se traduce como:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{1}$$

Entonces $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, y así $x^3 = 2y^3$, es decir, el cubo de lado x es de volumen doble que el de lado y.

En general, el "problema de las dos medias proporcionales entre a y b" consiste en hallar x e y , tales que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Su resolución se reduce a hallar la intersección de la curva $x^2 = ay$ con $xy = ab$ y es así como aparecen lo que nosotros llamamos parábola e hipérbola equilátera.

Menecmo detectó que para la resolución del problema había una familia de curvas adecuadas, los tres tipos de cónicas obtenidos por el mismo método, a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos, según que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso para la elipse, parábola e hipérbola, respectivamente.

Menecmo introduce estas curvas como “secciones de un cono circular recto por un plano perpendicular a una generatriz”. Por eso la “parábola” fue llamada, y con eta terminología aparece todavía en Arquímedes, “sección de cono rectángulo” (es decir sección de cono cuyo ángulo de apertura es recto por un plano perpendicular a una generatriz). La “elipse” era la “sección de cono acutángulo” y la “hipérbola (hasta Apolonio solo se consideró una rama de ella) la sección de cono obtusángulo”.

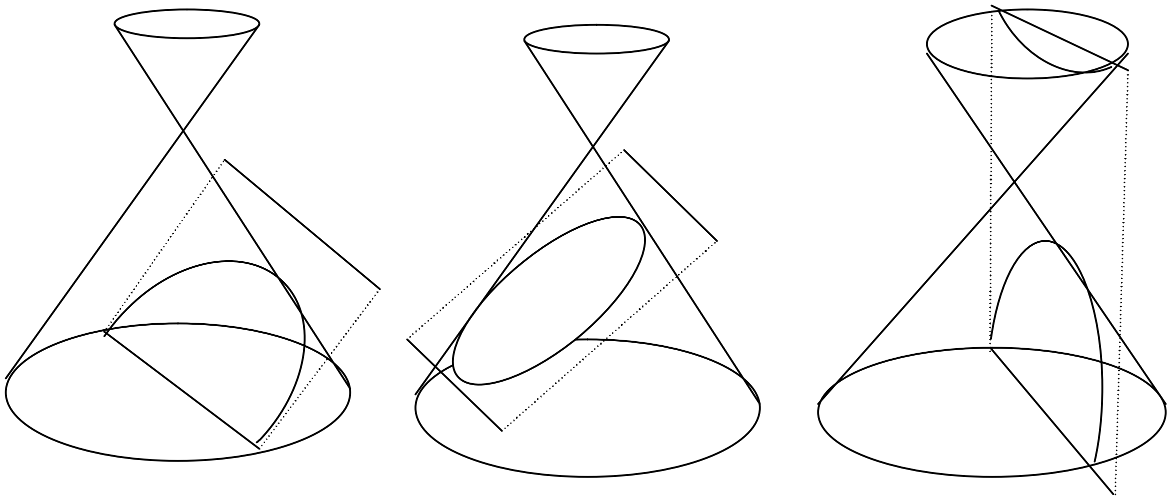
Hacia fines del siglo IV aparecen dos obras importantes en las que se desarrollan la teoría de las cónicas. La primera es de Aristeo, el Libro de los lugares sólidos (“lugares planos” eran los que dan lugar a rectas y círculos; “lugares sólidos” son aquellos en los que aparecen las cónicas por intersección de cilindros y conos con planos, “lugares lineales” eran otras curvas de orden superior no reducibles a las anteriores como la concoide). La segunda obra de interés, también perdida, fue la de Euclides, en cuatro libros, cuyo contenido debió ser en sus líneas fundamentales el que se encuentra en los cuatro primeros libros de las Cónicas de Apolonio, estos libros fueron escritos en ocho libros de los que actualmente se conservan siete gracias a los trabajos de Thabit ibn Qurra (hacia 856 d.C.) y de Edmond Halley (1656-1742)

Apolonio de Perga nació hacia el año 262 .C, en Perga , región de Panfilia (la actual Antalya, Turquía), estudió en el Museo de Alejandría con los sucesores de Euclides, muere en Alejandría hacia el 190 a.C.

Fue Apolonio en “Las Cónicas” quien no sólo demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones, variando la inclinación del plano que corta al cono, lo cual era un paso importante en el proceso de unificar el estudio de los tres tipos de curvas, sino que demostró que el cono no necesita ser recto y consideró, asimismo, el cono con dos hojas, con lo que identifica las dos ramas de la hipérbola. Asimismo en su tratado antes mencionado, fue el primero en usar el término “parábola”.

Asimismo menciona que un espejo parabólico refleja de forma paralela los rayos emitidos desde su foco, propiedad usada hoy en día en las antenas satelitales. La parábola también fue estudiada por Arquímedes, nuevamente en la búsqueda de una solución para un problema fanira: la cuadratura del círculo, dando como resultado el libro “Sobre la cuadratura de la parábola”.

IV.1.1.-La generación de las cónicas de Apolonio



parábola *elipse* *hipérbola*

Construcción de Apolonio de las tres secciones cónicas mediante un cono único, variando la inclinación del plano que corta al cono.

- Parábola: el plano de corte es paralelo a una sola generatriz.
- Elipse: el plano de corte no es paralelo a ninguna generatriz.
- Hipérbola: el plano de corte es paralelo a una sola generatriz.

IV.1.2.-La influencia histórica de Apolonio. Coordenadas y Geometría Analítica

Hemos visto en forma sintética las importantes y originales aportaciones de Apolonio al a la geometría griega, entre la abundante producción científica sobresale el exhaustivo especializado trabajo sobre las cónicas donde estudia las propiedades fundamentales de todos los clásicos elementos notables de estas curvas: ejes, centros, diámetros, asíntotas, focos, tangentes y normales.

Si en muchos ámbitos hay que conceder a Apolonio el valor de pionero, entre todos ellos hay que destacar su papel trascendental en el advenimiento de la Revolución Científica a partir del Renacimiento. Así lo reconocen algunos sabios e historiadores de la ciencia:

"La meditación sobre los libros de Apolonio hará posible la revolución astronómica operada por Kepler" (A.Koiré en Estudios de Historia del Pensamiento Científico, siglo XXI, Madrid, 1971, cap.4, p.44)

"Los griegos descubrieron las cónicas en estado salvaje en los conos o cilindros y Apolonio las cultivó como un mero juego de ingenio. ¿Cuál sería la sorpresa, quince siglos después, cuando Kepler descubrió que la trayectoria del planeta Marte es elíptica, y Galileo que la caída de las piedras es parabólica"(B.Mandelbrot, en el artículo "De Apolonio de Perga a Kepler, en Tusquets, Barcelona , 1984).

La influencia más relevante del aporte realizado por Apolonio en el ámbito estricto de la Matemática es sobre la emergencia de la Geometría Analítica, el trabajo de Apolonio, y antes el de Menecmo, inauguran una marcada trayectoria histórica que apunta al desarrollo de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes.

Apolonio utilizaba "Algebra Geométrica", Vieta en su obra "Arte Analítica" desarrolla el "Algebra Simbólica" pero no usa coordenadas. Al aunar ambos instrumentos, "coordenadas" y "Algebra literal", Fermat y Descartes alumbran la Geometría Analítica estableciendo un nexo entre la Geometría y el Algebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones, en función de aplicar el Análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio, definidos, en un "sistema de coordenadas", por una ecuación indeterminada en dos incógnitas, llamada la "ecuación de la curva", expresión matemática vinculada a la cura, implícitamente resume sus propiedades geométricas, las que luego son probadas y verificadas mediante el cálculo algebraico.

"El hecho de que Apolonio, uno de los más grandes geómetras de la antigüedad no consiguiese desarrollar de una manera efectiva la Geometría Analítica, se debe probablemente más a una pobreza en el número de curvas que de pensamiento; los métodos generales no son ni muy necesarios ni muy útiles cuando los problemas se refieren siempre a un número limitado de casos particulares. Por otra parte es bien cierto que los primeros inventores de la Geometría Analítica tenían a su disposición todo el álgebra renacentista (el Algebra de los cosistas italianos y el Algebra simbólica de Vieta), mientras que Apolonio tuvo que trabajar con las herramientas del Algebra Geométrica, mucho más rigurosa pero a la vez mucho más incomoda de manejar"(C.Boyer en su libro "Historia de la Matemática)

Hipatia (370-415)

El nombre de Hipatia significa la más grande. La leyenda de Hipatia de Alejandría nos muestra a una joven, virgen y bella, matemática y filósofa, cuya muerte violenta marca un punto de inflexión entre la cultura del razonamiento griego y el oscurantismo del mundo medieval. Como ocurre con todas las biografías de los matemáticos (y matemáticas) de la antigüedad, se sabe muy poco de su vida, y de su obra se conoce sólo una pequeña parte.

Fue recordada como una gran maestra y admirada por la magnitud de sus conocimientos. Era considerada como “el mejor matemático vivo” del mundo greco-romano.

Enseñó Matemáticas, Astronomía y Filosofía, escribió un trabajo titulado “El Canón Astronómico”, comentó las grandes obras de la matemática griega como la “Aritmética” de Diofanto, “Las Cónicas” de Apolonio, el libro III del “Almagesto” de Tolomeo, probablemente comentara junto a su padre, los “Elementos” de Euclides y el resto del “Almagesto”. Construyó instrumentos científicos como el astrolabio y el hidroscopio.

De ella se ha dicho: *"Hipatia es la primera mujer de ciencia cuya vida está bien documentada". “Aunque la mayoría de sus escritos se han perdido existen numerosas referencias a ellos”. "Fue la última científica pagana del mundo antiguo, y su muerte coincidió con los últimos años del Imperio romano". "Ha llegado a simbolizar el fin de la ciencia antigua".*

Los llamados **“cosistas italianos”** fueron matemáticos del sur de Alemania que, entre los siglos XV y XVI, trabajaron el álgebra en Italia. Su extraño nombre procede de la denominación de la incógnita mediante el nombre de “cosa” que significa en italiano “objeto”, tanto es así que el álgebra llegó a llamarse “el arte de la cosa”. Elaboraron sistemas de símbolos muy cómodos para operar en el lenguaje algebraico y el lenguaje matemático en general de los cuales muchos han llegado hasta nosotros.

François Viète (1540 - 1603), matemático francés, nacido en Fontenay-le-Comte y fallecido en París. Se le considera uno de los principales precursores del álgebra. Fue el primero en representar los parámetros de una ecuación con letras.

François Viète también fue conocido en su época como súbdito del rey, fiel y competente. Fue consejero privado de los reyes de Francia, Enrique III y Enrique IV.

René Descartes.(1596-1650), fue un filosofo, matemático y científico francés nacido en La Haye en Touraine, considerado el padre de la filosofía moderna**.**

V.-SECCIONES CÓNICAS

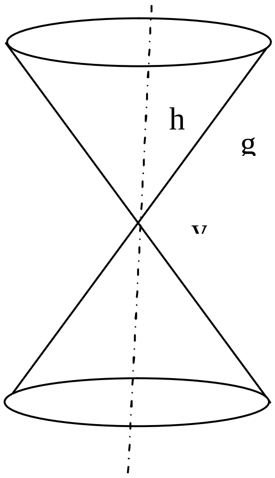
Así, bajo el esquema Descartes-Fermat, los puntos se convirtieron en parejas de números y las curvas en colecciones de parejas de números restringidas a una ecuación. Las propiedades de las curvas pudieron deducirse mediante procesos algebraicos aplicados a las ecuaciones. Con este desarrollo, la relación entre número y geometría llegó a ser plena. Los griegos clásicos sepultaron el álgebra en la geometría, pero ahora la geometría quedó eclipsada por el álgebra. Tal y como los matemáticos lo expresan, la geometría fue aritmetizada.

Morris Kline(1908-1992)

V.- Secciones Cónicas

V.1.-Definiciones

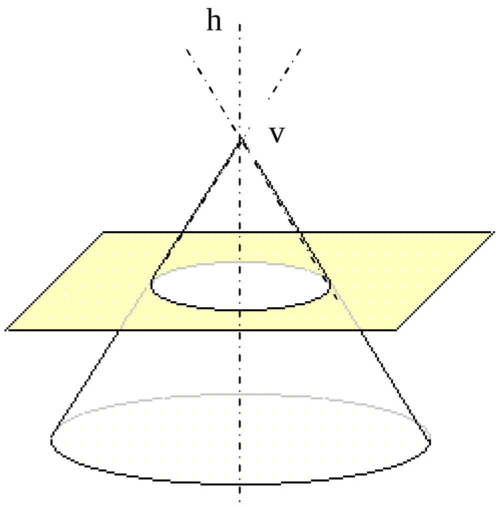
Definición 1: Un doble cono recto es la figura que engendra una recta g al girar alrededor de una recta h que la corta,(h se denomina eje del cono y g generatriz del cono, se llama vértice al punto de intersección del eje con las generatrices)



-La recta **h** es el eje del cono
-Las distintas posiciones de la recta **g** son las generatrices del cono
-El punto **v** intersección del eje **h** con las distintas posiciones de la generatriz **g** se llama vértice del cono

Definición 2: Una sección cónica es la figura plana que se obtiene como intersección de un doble cono recto con un plano.

Según las distintas posiciones del plano de intersección se obtienen las diferentes secciones cónicas, o simplemente cónicas, cuyos nombres son circunferencia, elipse, parábola, hipérbola. Esto es:

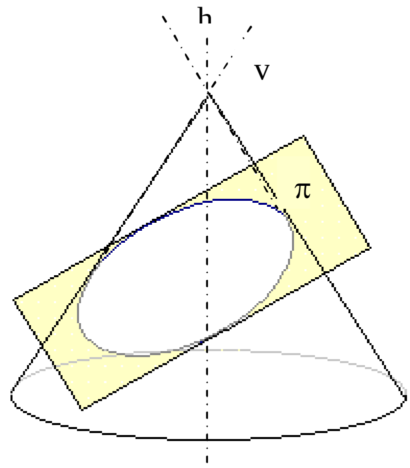


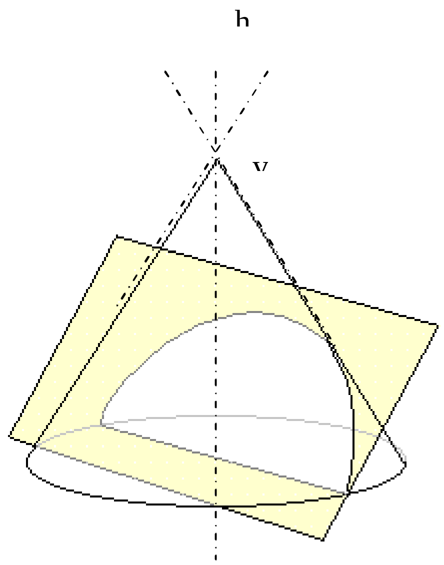
a) Es una circunferencia cuando el plano de intersección π es perpendicular al eje del cono y no contiene al vértice

Si el plano de intersección π contiene al vértice se obtiene como intersección un punto

b) Es una elipse cuando el plano de intersección π no es perpendicular al eje del cono. El plano π y el eje h forman entre si un ángulo superior al que forman el eje h del cono y una cualquiera de las generatrices, y no contiene al vértice

Si el plano π de intersección contiene al vértice se obtiene un punto



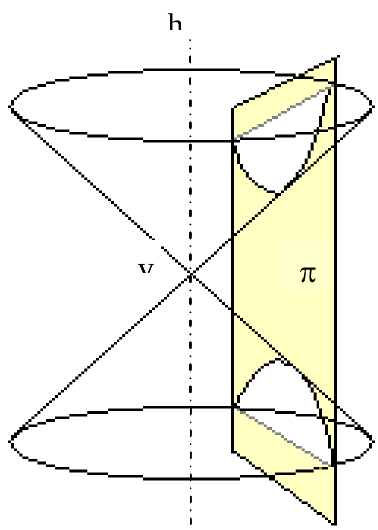


c) Es una parábola cuando el plano de intersección π es paralelo a una cualquiera de las generatrices g y no contiene al vértice.

Si el plano de intersección π contiene al vértice se obtiene una recta

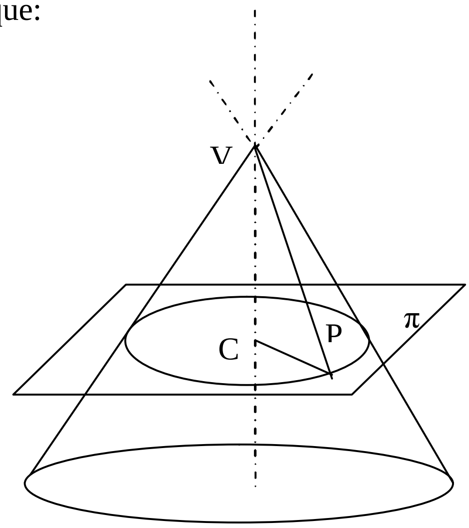
d) Es una hipérbola cuando el plano de intersección π y el eje del cono h forman entre si un ángulo inferior al que forman el eje h del cono y una cualquiera de las generatrices g, y no contiene al vértice

Si el plano de intersección π contiene al vértice se obtiene, como intersección, dos rectas que se cortan



V.2.- La Circunferencia

Sea el doble cono recto intersecado por el plano π perpendicular al eje del cono. En la circunferencia obtenida resulta que la distancia del vértice a un punto cualquiera P de la circunferencia es constante. Como el vector $\overrightarrow{VC}$ es fijo, siendo C el punto de intersección del plano π y el eje h del cono se tiene que:



En la circunferencia la distancia del vértice V a un punto cualquiera P de la circunferencia es constante; como el vector $\overrightarrow{VC}$ es fijo , se puede determinar la distancia entre C y P que es constante para todo P perteneciente a la circunferencia:

$$\left\| \overrightarrow{CP} \right\| = \sqrt{\left\| \overrightarrow{VP} \right\|^{2} - \left\| \overrightarrow{VC} \right\|^{2}}$$

<u>Proposición 1</u>:

Una circunferencia es el conjunto de puntos P de un plano π que satisfacen que su distancia a un punto fijo C, llamado centro, es constante. Esta constante se denomina radio de la circunferencia. En símbolos

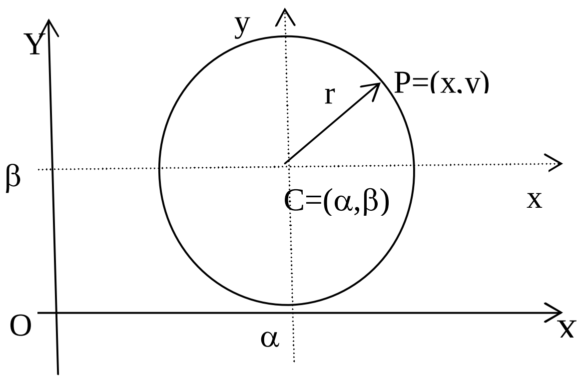
$$\mathbf{C}\ (C,r) = \{X \in IR^2 /\ d(X,C) = r\}.$$

C (C,r) significa los puntos de una circunferencia **C** de centro el punto C y radio r

V.2.1.-Ecuación General de la Circunferencia-Proposiciones.

Proposición 2:

a) La ecuación vectorial de la circunferencia **C** (C,r) es: $\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP} = r^2$



Demostración:

Sea P $\in$ **C** (C,r), la distancia entre los puntos P y C es r, esto es d(P,C) = r. Como r >0, la igualdad anterior significa que:

d(P,C) = $\|P - C\| = \sqrt{(P-C).(P-C)} = r$

Elevando al cuadrado resulta:

$$\left\|\overrightarrow{PC}\right\|^2 = r^2 \Rightarrow (P-C).(P-C) = r^2 \Rightarrow \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PC} = r^2$$

Con lo cual se ha probado que si P $\in$ **C** (C,r) entonces P = (x,y) verifica $\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP} = r^2$

b) Recíprocamente, si P = (x,y) verifica $\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP} = r^2$ se deduce que:

$\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP} = \left\|\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PC}\right\| = r^2$ de lo que se deduce, por ser $\left\|\overrightarrow{CP}\right\| > 0$ y r >0, que $\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = r$, esto es que d(P,C) = r, o sea que P $\in$ **C** (C,r)

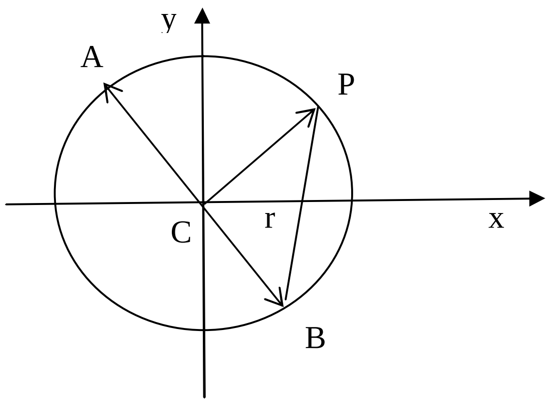
Proposición 3:

Sean A y B dos puntos de un plano. Un punto P del plano pertenece a la circunferencia en la que los puntos A y B son diametralmente opuestos si y solo si los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ son perpendiculares

Demostración:

Sea IR^2 el plano en el que trabajaremos cumpliendo todas las condiciones de un plano euclídeo, podemos suponer definido el producto escalar usual, también según el grafico

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC}$



Sea r el radio de la circunferencia y C su centro entonces tenemos:

$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} = 0$

P $\in$ **C** (C,r) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP} = 0$

Con A y B puntos de la circunferencia diametralmente opuestos

Si **C** (C,r) es la circunferencia centrada en C y radio r, se tiene:

$r^2 = \left\|\overrightarrow{CP}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP}\right)$ (1)

Observando el grafico, resulta que el vector $\overrightarrow{CP}$ geométricamente se puede obtener como $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}$ o bien como $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP}$ luego en la expresión (1) podemos escribir $r^2 = \left\|\overrightarrow{CP}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP}\right) = \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}).(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP}\right)$ aplicando la propiedad distributiva del producto escalar resulta:

$\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BP}\right) + \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right)$

Como $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} = r, \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC}$ entonces resulta

$\left(-r.r\right) + \left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BP}\right) - \left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AP}\right) + \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right)$

$= -r^2 + \left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BP}\right) - \left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AP}\right) + \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right) =$

$= -r^2 + \left[\overrightarrow{CA}.(\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{AP})\right] + \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right) =$ por ser $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA}$

$= -r^2 + \left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right) =$

$= -r^2 + r2r + \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right) =$

$= -r^2 + 2r^2 + \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right) =$

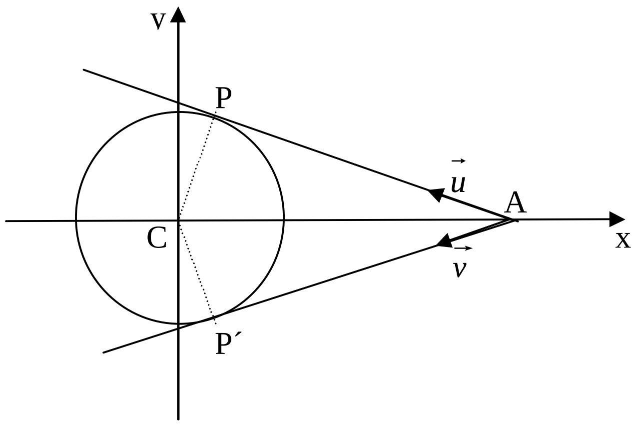
$= r^2 + \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right) \Rightarrow$ resulta :

$r^2 = r^2 + \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$

Lo cual demuestra la ortogonalidad deseada.

Proposición 4:

Consideremos una circunferencia de centro C y un punto A exterior a ella . Si P y P' son los puntos de intersección de las tangentes a la circunferencia que pasan por A se tiene $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\overrightarrow{AP'}\right\|$. Además, $\overrightarrow{CP}$. es perpendicular a $\overrightarrow{AP}$.



Demostración

Sea r el radio de la circunferencia y $\vec{u}$ un vector unitario esto es, $\left\|\vec{u}\right\| = 1$, en la dirección del vector $\overrightarrow{AP}$. Si elegimos un número λ tal que $\lambda = \left\|\overrightarrow{AP}\right\|$ se tiene que; además podemos decir que $\vec{u} \parallel \overrightarrow{AP}$ entonces $\overrightarrow{AP}. = \lambda \vec{u}$

$r^2 = \left\|\overrightarrow{CP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{CA} + \lambda \vec{u}\right\|^2$ por definición de norma resulta

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{CA} + \lambda \vec{u}\right\|^2 &= (\overrightarrow{CA} + \lambda \vec{u}).(\overrightarrow{CA} + \lambda \vec{u}) = \\
&= \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA} + \lambda \vec{u}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\lambda \vec{u} + \lambda \vec{u}.\lambda \vec{u} = \\
&= \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 + \lambda^2 \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\lambda(\vec{u}.\overrightarrow{CA}) = \qquad \text{como } \vec{\text{u}} \text{ es unitario resulta :} \\
&= \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 + \lambda^2 + 2\lambda(\vec{u}.\overrightarrow{CA})
\end{aligned}$$

Si consideramos la ecuación en λ esta ha de tener una solución únicamente ya que $\overrightarrow{AP}$. es tangente a la circunferencia, y esta solución es $\lambda = \left\|\overrightarrow{AP}\right\|$

$$\lambda^2 + 2\lambda(\vec{u}.\overrightarrow{CA}) + \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - r^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2(\vec{u}.\overrightarrow{CA}) \pm \sqrt{\left[2(\vec{u}.\overrightarrow{CA})\right]^2 - 4(\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - r^2)}}{2}$$

La ecuación tiene solución única si y solo si $(\vec{u}.\overrightarrow{CA})^2 = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - r^2$ (1)

Y esta solución única es : $\lambda = -(\vec{u}.\overrightarrow{CA}) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \lambda = -(\vec{u}.\overrightarrow{CA})$ (2)

Sea $\vec{v}$ un vector unitario en la dirección $\overrightarrow{AP'}$ el mismo resultado produce:

$$(\vec{v}.\overrightarrow{CA})^2 = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - r^2 \quad (3)$$

$$\text{y} \quad \left\|\overrightarrow{AP'}\right\| = -(\vec{v}.\overrightarrow{CA}) \quad (4)$$

De (1),(2),(3) y (4) se deduce que $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\overrightarrow{AP'}\right\|$. ,

Obtenemos $\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CP}\right\|^2$

y por lo tanto, el triángulo CPA satisface el teorema de Pitágoras.

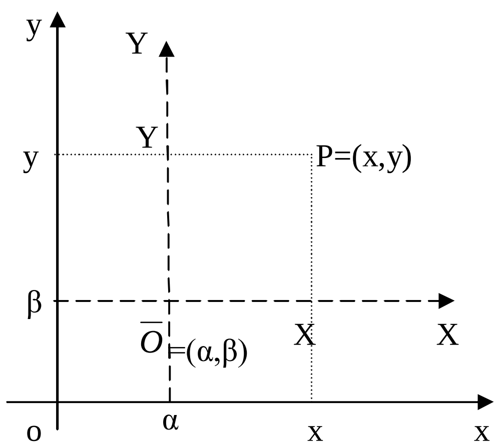
Esto prueba que el triángulo CPA tiene un ángulo recto en P, lo cual demuestra la proposición

V.3.-Ecuaciones de las Cónicas en un Sistema de Coordenadas Cartesianas

Sea el sistema de ejes de coordenadas cartesiano xoy. Un punto P $\in IR^2$ tiene por coordenadas cartesianas el par de números reales (x,y)

Consideremos el punto $\overline{O} \in IR^2$ de coordenadas cartesianas el par de números reales (α, β).

Con este punto $\overline{O}$ podemos considerar el sistema de ejes X$\overline{O}$Y, el punto P$\in$ IR^2 tendrá como coordenadas cartesianas el par de números reales (X,Y), así podemos escribir la siguiente relación entre las coordenadas en los dos sistemas de la siguiente forma :



$$(1) \quad \begin{cases} X + \alpha = x \\ Y + \beta = y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X = x\text{-}\alpha \\ Y = y\text{-}\beta \end{cases} \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) son las ecuaciones que permiten pasar de un sistema a otro.

<u>V.3.1.-Circunferencia</u>

Ahora veremos la ecuación de la circunferencia en un sistema de coordenadas cartesiano.

En el sistema xoy la ecuación cartesiana de **C** (C, r) es: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

Demostración:

En el sistema xoy el punto P tiene las coordenadas P=(x,y), en el sistema $X\bar{O}Y$ sus coordenadas son P=(X,Y), la relación entre ellas esta dada por las expresiones:

$$\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases}$$

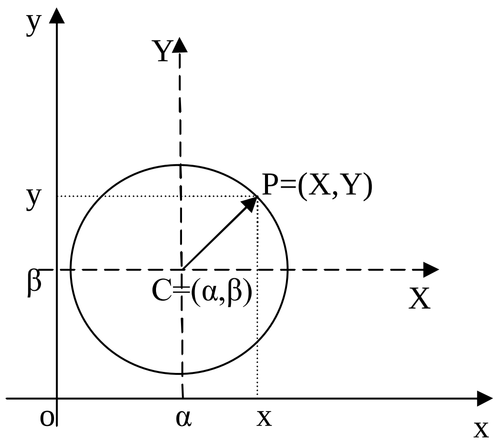
Podemos escribir el punto

P = (X, Y) = (x-α, y-β)

Tomando el vector $\overrightarrow{CP}$ lo podemos expresar: $\overrightarrow{CP}=(x-\alpha).\vec{i}+(y-\beta).\vec{j}$

tomando la ecuación vectorial

$\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP}=r^2$



Luego $\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP}=\left[(x-\alpha).\vec{i}+(y-\beta).\vec{j}\right]\left[(x-\alpha).\vec{i}+(y-\beta).\vec{j}\right]=$

$$=(x-\alpha)^2.\vec{i}^{\,2}+(x-\alpha).(y-\beta)\vec{i}.\vec{j}+(y-\beta).(x-\alpha).\vec{i}.\vec{j}+(y-\beta)^2.\vec{j}^{\,2}$$

$$=(x-\alpha)^2.\vec{i}^{\,2}+2(x-\alpha).(y-\beta)\vec{i}.\vec{j}+(y-\beta)^2.\vec{j}^{\,2}$$

Como $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=1$, $\quad \vec{i}\perp\vec{j}\Rightarrow\vec{i}.\vec{j}=0$ remplazando en la expresión anterior:

$$\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP}=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$$

Entonces la ecuación vectorial $\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP}=r^2$ es equivalente a la ecuación cartesiana

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

V.4.-Ecuación General de una Cónica. Proposiciones

Toda cónica es una expresión polinómica de segundo grado en dos variables. Esta expresión se denomina ecuación general de una cónica:

$$Ax^2+B\,xy+Cy^2+D\,x+Ey+F=0$$

Proposición 5:

1.- La ecuación general del conjunto de todas las circunferencias del plano es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2)$$

Con $A = C \neq 0$ y $D^2 + E^2 - 4AF > 0$ (1)

Demostración:

Sea **C** (C, r) una circunferencia del plano, su ecuación cartesiana es:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Desarrollando esta expresión obtenemos:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0;$$

Si ponemos $D = -2\alpha$; $E = -2\beta$; $F = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$

se tiene que: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Además reemplazando A, D, E, F en la expresión (1) se tiene:

$$D^2 + E^2 - 4AF = 4\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\left(\alpha^2 + \beta^2 - r^2\right) = 4r^2 > 0$$

y $A = C = 1 \neq 0$

Con lo cual queda probado que en toda circunferencia del plano existe números: A, C, D, E, F tales que cumplen la condición (1) y que la (2) es la ecuación de esa circunferencia.

2.-Recíprocamente, sea un conjunto de puntos del plano que verifica la ecuación:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + yE + F = 0$ con $A = C \neq 0$; $D^2 + E^2 - 4AF > 0.$

Como $A \neq 0$

la ecuacion $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ puede escribirse

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

completando cuadrados resulta:

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} + y^2 + \frac{E}{A}y + \frac{E^2}{4A^2} + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E^2}{4A^2} = 0$$

agrupando:

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(Y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$$

* El primer miembro es el cuadrado de la distancia entre el punto variable $P=(x,y)$ y el punto fijo $C=\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2A}\right)$

* El segundo miembro es contante y positivo por ser: $D^2+E^2-4AF\rangle 0$

luego el conjunto de puntos del plano que verifican (1) y (2) es una circunferencia de centro

$C=\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2A}\right)$ y radio $r=\left|\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}\right|$

Corolario1: Una ecuación de segundo grado en dos variables

$$Ax^2+B\,xy+Cy^2+D\,x+Ey+F=0$$

es la ecuación de una circunferencia , cuando y solo cuando, tiene iguales los coeficiente de los términos cuadrados , B=0 y se verifica que : $D^2+E^2-4AF>0$

Corolario2: La ecuación de todas las circunferencias del plano se reduce a la forma:

$x^2+y^2+D'x+E'y+F'=0$

donde

$D'=\frac{D}{A},\quad E'=\frac{E}{A},\quad F'=\frac{F}{A}$

Teorema: La ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ con $A=C\neq 0$ es siempre la ecuación de una circunferencia del plano, donde:

Si $D^2+E^2-4AF>0$ la circunferencia tiene radio real.

Si $D^2+E^2-4AF<0$ la circunferencia es imaginaria.

Si $D^2+E^2-4AF=0$ la circunferencia tiene por radio a un punto del plano.

V.5.-Circunferencia determinada por tres puntos no alineados

<u>*Proposición 6*:</u> Por tres puntos no alineados pasa una y solo una circunferencia del plano

Demostración:

Sean $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$ y $P_3=(x_3,y_3)$ tres puntos del plano, es decir cumplen

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

Sea **C** (C, r) una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + D\,x + Ey + F = 0$

Si queremos que **C** (C, r) pase por los puntos P_1, P_2 y P_3 deben verificarse:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0 \end{cases}$$

De la cual se obtiene:

$$\begin{cases} Dx_1 + Ey_1 + F = -\left(x_1^2 + y_1^2\right) \\ Dx_2 + Ey_2 + F = -\left(x_2^2 + y_2^2\right) \\ Dx_3 + Ey_3 + F = -\left(x_3^2 + y_3^2\right) \end{cases}$$

Que es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas D, E, F

Como por hipótesis el determinante del sistema es $\neq 0$, existe una y solo una terna: (D, E, F) solución del sistema, luego existe una y solo una circunferencia que pasa por los tres puntos: P_1, P_2 y P_3.

V.5.1.-Otros Resultados

V.5.2.-Intersección de Recta y Circunferencia. Proposiciones

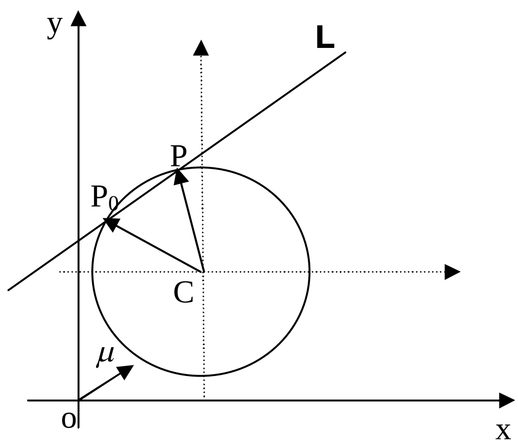
Proposición 7:

Sea una circunferencia **C** (C, r) y **L** una recta que pasa por el punto P_0 y es paralela al versor μ. Entonces **C** (C, r) y **L** tienen intersección no vacía si y solo si

$$\left(\overrightarrow{CP}.\mu\right)^2 \geq \left\|\overrightarrow{CP_0}\right\|^2 - r^2$$

*Si se cumple la desigualdad, la recta **L** y la circunferencia **C** se intersecan en dos puntos

*Si se cumple la igualdad, la recta **L** y la circunferencia **C** tienen un solo punto en común



Demostración:

Sea P=(x,y) un punto de la recta **L** ,P $\in$ **L** $\Leftrightarrow \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CP_0} + t\mu$, $\forall t \in$ IR (1)

Además P $\in$ **C** $\Leftrightarrow \overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CP_0} = r^2$ (2) ecuación vectorial de la circunferencia

Entonces **C** $\cap$ **L** $\neq \varnothing$ cuando y solo cuando se verifiquen simultáneamente (1) y (2)

es decir : $\left(\overrightarrow{\mathrm{CP}_0} + t\mu\right)\left(\overrightarrow{CP_0} + t\mu\right) = r^2$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{CP}_0}.\overrightarrow{CP_0}\right) + \left(\overrightarrow{CP_0}.t\mu\right) + \left(t\mu.\overrightarrow{CP_0}\right) + (t\mu.t\mu)$$

$$\left\|\overrightarrow{CP_0}\right\|^2 + 2\left(\overrightarrow{CP_0} + \mu\right)t + t^2\|\mu\|^2 = r^2$$

como μ es versor $\Rightarrow \|\mu\| = 1$,

$\mathrm{t}^2 + 2t\left(\overrightarrow{CP_0}.\mu\right) + \left(\left\|\overrightarrow{CP_0}\right\|^2 - r^2\right) = 0$ (3) Resulta una ecuación de segundo grado en t.

Para que tenga raices reales, es necesario que :

$$4\left(\overrightarrow{\mathrm{CP}_0}.\mu\right)^2 - 4\left(\left\|\overrightarrow{CP_0}\right\|^2 - r^2\right) \geq 0$$

o lo que es equivalente

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{CP}_0}.\mu\right)^2 \geq \left\|\overrightarrow{CP_0}\right\|^2 - r^2$$

*Si la circunferencia y la recta se intersecan en dos puntos la ecuación (3) tiene dos raíces reales y distintas, entonces verifica:

$$\left(\overrightarrow{CP_0}.\mu\right)^2 > \left\|\overrightarrow{CP_0}\right\|^2 - r^2$$

** Si la circunferencia y la recta se intersecan en un punto la ecuación (3) tiene dos raíces reales y coincidentes esto es:

$$\left(\overrightarrow{CP_0}.\mu\right)^2 = \left\|\overrightarrow{CP_0}\right\|^2 - r^2$$

Con lo que queda probada la proposición

V.6.-Elipse

<u>*V.6.1.-Breve reseña histórica*</u>

La elipse como curva geométrica, fue estudiada por Menaechmus, investigada por Euclides, y su nombre se atribuye a Apolonio de Perge. El foco y la directriz de la sección cónica de una elipse fueron estudiadas por Pappus. En 1602, Kepler creía que la órbita de Marte era ovalada, aunque más tarde descubrió que se trataba de una elipse con el Sol en un foco. De hecho, Kepler introdujo la palabra "focus" y publico su descubrimiento en 1609.Halley, en 1705, demostró que el cometa que ahora lleva su nombre trazaba una órbita elíptica alrededor del Sol

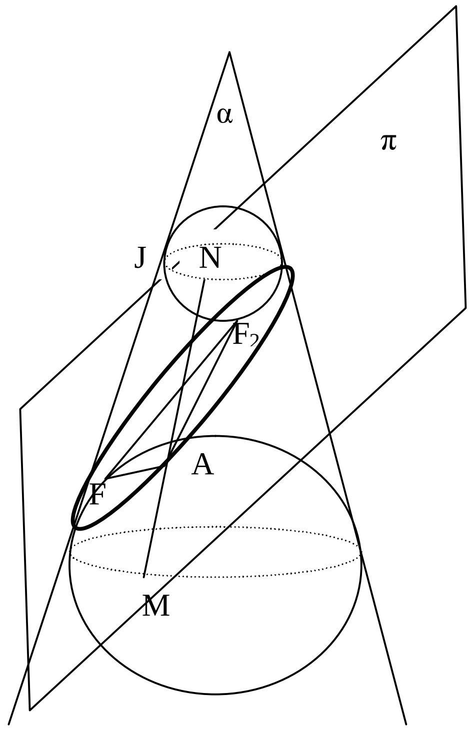
V.6.2.-Proposiciones

Proposición1:

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos A de un plano cuya suma de las distancias de A a dos puntos fijos y distintos, llamados focos F_1 y F_2 , es constante

O sea: .$\left(\left\|\overrightarrow{AF_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{AF_2}\right\| = \text{costante}\right)$

Demostración:



Sea π el plano dado que forma con el eje un ángulo mayor que α sin ser 90°. Consideremos las dos esferas tangentes al cono y al plano.

Estas esferas tocan al plano π en los puntos F_1 y F_2 .

Por la proposición 4 dada en circunferencia, resulta que

$\left\|\overrightarrow{AF_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{AN}\right\|$ y $\left\|\overrightarrow{AF_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$

Como $\left\|\overrightarrow{AN}\right\| + \left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{JL}\right\|$ que es fija ,

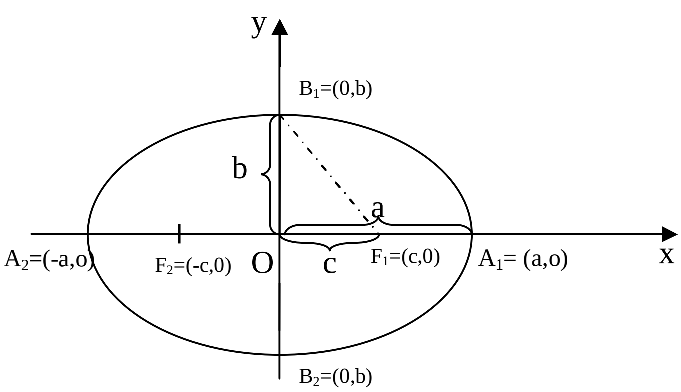
se tiene: $\left\|\overrightarrow{AF_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{AF_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{JL}\right\| = \text{cte}$

que es lo que queremos demostrar

V.7.- Ecuaciones de las Cónicas en un sistema de coordenadas cartesianas.

V.7.1.- La Elipse. Grafica y Elementos.

Dibujando ahora la elipse en un sistema de ejes de coordenadas cartesianas



- El eje que contiene a los focos F_1 y F_2 se denomina eje principal

- El eje perpendicular al eje mayor que pasa por el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ se denomina eje secundario.
- Las distancias:

  $d(A_1,0) = d(A_2,0) = |a|$ semieje principal

  $d(F_1,0) = d(F_2,0) = |c|$

  $d(B_1,0) = d(B_2,0) = |b|$ semieje secundario

  $d(F_1,F_2) = 2c$ distancia focal
- El cociente $\varepsilon = \frac{c}{a}$, entre c y a, se denomina excentricidad y como a > c, se tiene que $0 < \varepsilon < 1$
- En el triangulo rectángulo F_10B_1 se tiene que:

  $B_1 = (0,b)$, $F_1 = (c,0)$

$$d(B_1,F_1) = \|B_1 - F_1\| = \|F_1 - B_1\| = \sqrt{(F_1 - B_1).(F_1 - B_1)} =$$

$$= \sqrt{(c,-b).(c,-b)} = \sqrt{c^2 + b^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = d^2(B_1,F_1) = \left\|\overline{B_1 F_1}\right\|^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Proposición 2:

Para todo punto A de una elipse se tiene que: $\left\|\overrightarrow{A F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{A F_2}\right\| = 2a$

Demostración:

Usando la definición de elipse $\left\|\overrightarrow{A F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{A F_2}\right\| =$ constante, si en lugar de A ponemos A_1 y A_2 , se obtiene $\left\|\overrightarrow{A_1 F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{A_1 F_2}\right\| =$ constante $= \left\|\overrightarrow{A_2 F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{A_2 F_2}\right\|$

$\overrightarrow{A_1 F_2} = \overrightarrow{A_1 F_1} + \overrightarrow{F_1 F_2}$, $\overrightarrow{A_2 F_1} = \overrightarrow{A_2 F_2} + \overrightarrow{F_2 F_1}$; luego

$\left\|\overrightarrow{A_1 F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{A_1 F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_1 F_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_2 F_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2 F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{A_2 F_2}\right\|$ de aquí se deduce

$2\left\|\overrightarrow{A_1 F_1}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{A_2 F_2}\right\|$ o equivalente a

$\left\|\overrightarrow{A_1 F_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_2 F_2}\right\|$ utilizando este resultado se tiene

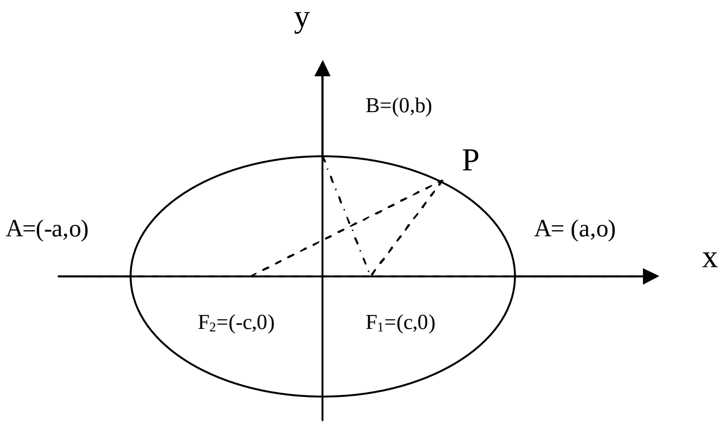
$\left\|\overrightarrow{A F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{A F_2}\right\| =$ constante $= \left\|\overrightarrow{A_1 F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{A_1 F_2}\right\|$, como $\left\|\overrightarrow{A_1 F_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_2 F_2}\right\|$ luego

$$\left\|\overrightarrow{A\,F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{A\,F_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_1\,F_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{A_1\,F_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_2\,F_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{A_1\,F_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_1\,A_2}\right\| = 2a$$

V.7.2.-Ecuaciones de la elipse en un sistema de coordenadas cartesiano

Haciendo uso de la proposición 1 tenemos

$$\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$$



$$d(P,F_1) = \left\|P - F_1\right\| = \left\|((x+c), y)\right\| = \sqrt{((x+c),y).((x+c),y)} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| = d(P,F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$d(P,F_2) = \left\|P - F_2\right\| = \left\|(x,y) - (c,0)\right\| = \left\|((x-c), y)\right\| = \sqrt{((x-c),y).((x-c),y)} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = d(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Luego la expresión (1) resulta

$$2\,a = \left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$2\,a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{elevado al cuadrado resulta}$$

$$\left(2\,a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,\right)^2$$

$$4\,a^2 - 4\,a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$4\,a^2 + x^2 + 2\,c\,x + c^2 + y^2 - 4\,a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = x^2 - 2\,c\,x + c^2 + y^2$$

Simplificando resulta

$$4\,a^2 + 4\,c\,x - 4\,a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 0$$

$$4(\ a^2 + c\,x\ -\ a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ ) = 0$$

$a^2 + c\,x\ =\ a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ elevando de nuevo al cuadrado resulta

$$(\ a^2 + c\,x\ )^2 = (\ a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ )^2$$

$$a^4 + 2\,a^2\,c\,x + c^2\,x^2\ =\ a^2\left[\ (x+c)^2+y^2\ \right]$$

$$a^4 + 2\,a^2\,c\,x + c^2\,x^2\ =\ a^2\ [(\ x^2 + 2\,c\,x + c^2\ ) + y^2\ ]$$

$$a^4 + 2\,a^2\,c\,x + c^2\,x^2\ =\ a^2\,x^2 + 2\,a^2\,c\,x + a^2\,c^2 + a^2\,y^2$$

simplificando y teniendo en cuenta que: $b^2 = a^2 - c^2$ obtenemos

$$a^4 -\ a^2\,c^2 + c^2\,x^2\ =\ a^2\,x^2 + a^2\,y^2$$

$$a^2\,(a^2 -\ c^2\,) + c^2\,x^2\ =\ a^2\,x^2 + a^2\,y^2$$

$$a^2\,b^2\ =\ a^2\,x^2\ - c^2\,x^2 + a^2\,y^2$$

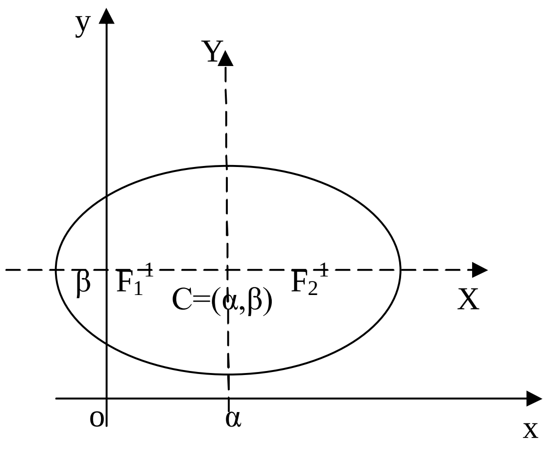
$$a^2\,b^2\ = (a^2\ - c^2\,)x^2 + a^2\,y^2$$

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2}$$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\quad \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si la elipse tiene su centro en el punto de coordenadas (α,β) y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, su ecuación es:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$



V.7.3.-Ecuación General de la Elipse

Recodemos que toda cónica es una expresión polinómica de segundo grado en dos variables, y que esta expresión se denomina ecuación general de una cónica:

$$Ax^2 + B\,xy + Cy^2 + D\,x + Ey + F = 0$$

Proposición 3:

1.- Una ecuación de la forma $Ax^2 + B\,xy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $B = 0$ es la ecuación de cualquier elipse si y sólo si $A.C > 0$.

Demostración:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una elipse si y solo si $A.C > 0$.

Sea la ecuación de la elipse:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Desarrollando esta expresión obtenemos:

$$\frac{b^2(x-\alpha)^2 + a^2(y-\beta)^2}{a^2b^2} = 1 \Rightarrow b^2(x-\alpha)^2 + a^2(y-\beta)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2\alpha x - 2a^2\beta y + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0;$$

Si ponemos $A = b^2, C = a^2 \quad D = -2b^2\alpha \;; E = -2a^2\beta \;; \quad F = b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2$

se tiene que: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y se observa que $A.C > 0$

Recíprocamente, sea un conjunto de puntos del plano que verifica la ecuación:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $AC > 0$

Como $A \neq 0$ y $C \neq 0$

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ puede escribirse:

$$A(x^2 + \frac{D}{A}x) + C(y^2 + \frac{E}{C}y) + F = 0$$

Completando cuadrados resulta:

$$A(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}) + C(y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}) + F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} = 0$$

agrupando:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC}$$

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{1}{A}}+\frac{\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2}{\frac{1}{C}}=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC}$$

Considerando: $\alpha=-\frac{D}{2A}, \beta=-\frac{E}{2A}, G=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC}$

Queda la expresión:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{\frac{1}{A}}+\frac{(y-\beta)^2}{\frac{1}{C}}=G \qquad (1)$$

Donde A ≠ 0 , C ≠ 0 y A.C >0, entonces A y C tienen el mismo signo. Si G tiene el mismo signo de A y C la (1) puede escribirse en la forma de la ecuación de una elipse:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

V.8.-Hipérbola

V.8.1.- Breve reseña Histórica

Según la tradición, las secciones cónicas fueron descubiertas por Menecmo, en su estudio de la duplicación del cubo, donde demostró la existencia de una solución mediante el corte de una parábola con una hipérbola, lo cual es confirmado posteriormente por Proclo y Eratostenes.

Sin embargo el primero en usar el término hipérbola fue Apolonio de Perge en su trabajo "cónicas", considerada cumbre sobre el tema de las matemáticas griegas, y donde se desarrolla el estudio de las tangentes a secciones cónicas.

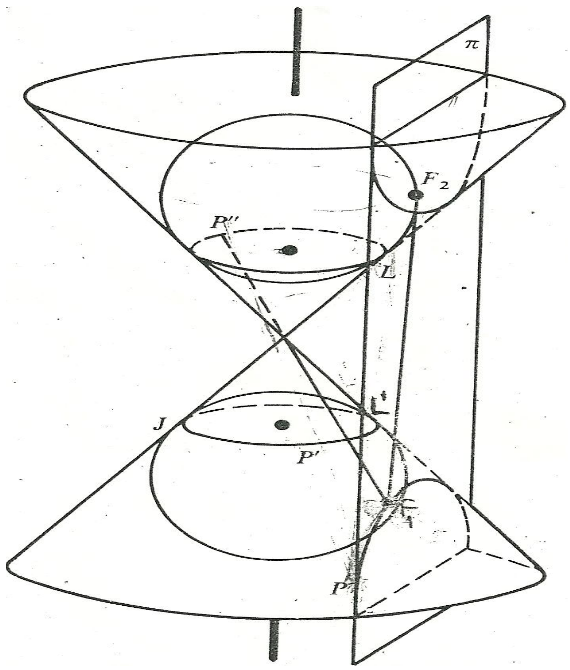
V.8.2.-Proposiciones

Proposición:

Una hipérbola a es el lugar geométrico de los puntos P de un plano cuya diferencia a dos puntos fijos y distintos F_1 y F_2, llamados focos es constante en valor absoluto.

$\|PF_1\|-\|PF_2\| = \pm\ 2a$,a constante.

Grafico1:



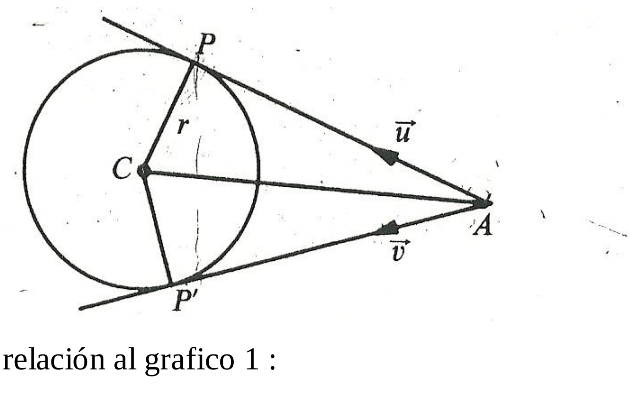
Demostración

Consideremos las dos esferas tangentes al cono y al plano π (en los puntos L y L'); sean F_1 y F_2 los puntos los puntos de contacto del plano y la esfera.

Teniendo en cuenta el siguiente resultado:

Sea la circunferencia de centro C y radio r, A punto exterior a ella. Si P y P' son los puntos de intersección de las tangentes a la circunferencia que pasa por el punto A, se tiene que:

$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \|AP'\|$, además CP es perpendicular a AP. Gráficamente es:



Podemos expresar en relación al grafico 1 :

$\|PF_1\| = \|PP'\|$

$\|PF_2\| = \|PP''\|$

$\|PP''\| - \|P'P''\| = \|P'P''\| = \|JL\| = \text{constant}e$

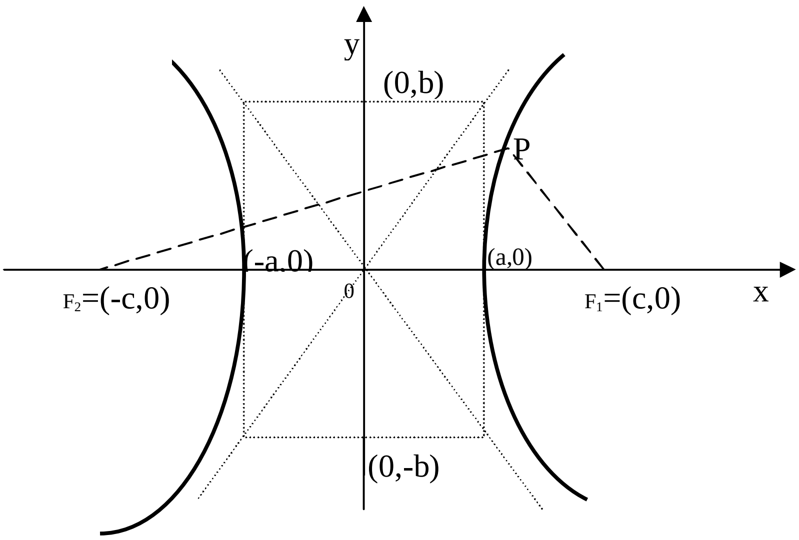
Se tiene que :

$\|PF_2\| - \|PF_1 = \|PP''\|\| - \|PP'\| = \|JL\| = \text{constante}$

V.9.-Ecuaciones de las cónicas en un Sistema de Coordenadas Cartesianas

IV.9.1.- La Hipérbola. Gráfico y elementos

* Si dibujamos una hipérbola en un sistema de coordenadas cartesianas de manera que el eje principal contiene a los focos F_1 y F_2 y el eje secundario es perpendicular al eje principal y divide al segmento $F_1 F_2$ en dos segmentos iguales. Los demás elementos de la hipérbola reciben los mismos nombres que en el caso de la elipse y se señalan en la siguiente figura:



En manera análoga a la realizada para la elipse se puede probar que :

$\|PF_1\| - \|PF_2\| = \pm$ a , (se toma a > 0 si el punto P esta en la rama derecha y a < 0 , si P esta en la rama izquierda)

- para una hipérbola la excentricidad es $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ con c > a , y , por lo tanto $\varepsilon > 1$

Asintotas

Definición:

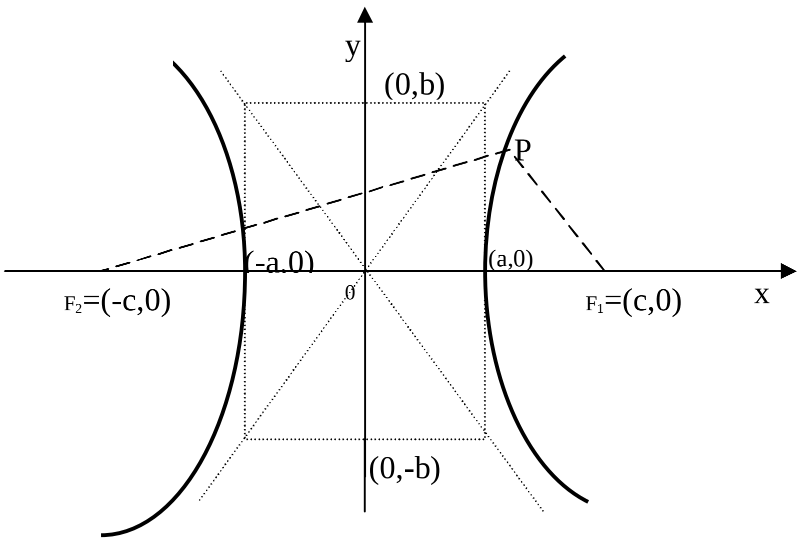
Se denomina asintotas a una curva plana en general, a las rectas que se acercan a las curvas en los puntos del infinito.

En el caso de la hipérbola las rectas que pasan por el centro del sistema de coordenadas y tienen a las vectores (a, b) o (a , - b) como vectores de dirección son asintotas de la hipérbola .

Hipérbola en los puntos del infinito:

Las ecuaciones de las asintotas son : $y = \frac{b}{a}x$, $y = \frac{-b}{a}x$

Grafico



<u>*V.9.2.- Ecuaciones de la Hipérbola en un sistema de coordenadas cartesiano*</u>

Para hallar la ecuación de una hipérbola de semieje mayor "a" y foco en los puntos (-c ,0) y (c , 0) , se procede como en el caso de la elipse , esto es , haciendo uso de la definición :

$\|PF_1\| - \|PF_2\| = \pm$ 2 a

Por lo tanto:

$\|PF_1\| - \|PF_2\| = \sqrt{(x-c)^2 \div y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm$ 2 a

De aquí se sigue que:

$$4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2$$

Simplificando obtenemos que:

$$a^2 + xc = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que $b^2 = c^2 - a^2$, se obtiene : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, llamada ecuación canónica de la hipérbola con centro (0 , 0) y focos (c , 0) y (-c , 0) eje real x.

- por supuesto que en el sistema 0x y 0y en que 0 = (α, β) la ecuación de la hipérbola adopta la forma

$$\frac{(x-\alpha)}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

- si los focos se hubieran elegido sobre el eje y, se hubieran mantenido A_1= (0 , a) y A_2= (0 , - a) como vértices , la ecuación (1) se pondría :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

<u>V.9.3.-Ecuación general de la hipérbola</u>

Desarrollando la (2) resulta:

$x^2 b^2 - y^2 a^2 - 2\alpha b^2 x + 2\beta a^2 y + (\alpha^2 b^2 - \beta^2 a^2 - a^2 b^2) = 0$

Del tipo : $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F$, con $A \neq C$.

V.10.-Parábola

<u>V.10.1.-Breve reseña histórica. Aplicaciones prácticas</u>

Históricamente las secciones cónicas fueron descubiertas por Menecmo en su estudio del problema de la duplicación del cubo, donde demuestra la existencia de una solución mediante el corte de una parábola con una hipérbola, lo cual es confirmado posteriormente por Proclo y Eratóstenes.

Sin embargo, el primero en usar el término *parábola* fue Apolonio de Perge, en su tratado *Cónicas*, considerada obra cumbre sobre el tema de las matemáticas griegas, y donde se desarrolla el estudio de las tangentes a secciones cónicas.

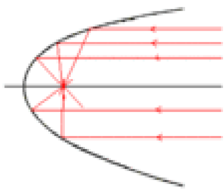
> Si un cono es cortado por un plano a través de su eje, y también es cortado por otro plano que corte la base del cono en una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, y si adicionalmente el diámetro de la sección es paralelo a un lado del triángulo axial, entonces cualquier línea recta que se dibuje desde la sección de un cono a su diámetro paralelo a la sección común del plano cortante y una de las bases del cono, será igual en cuadrado al rectángulo contenido por la línea recta cortada por ella en el diámetro que inicia del vértice de la sección y por otra línea recta que está en razón a la línea recta entre el ángulo del cono y el vértice de la sección que el cuadrado en la base del triángulo axial tiene al rectángulo contenido por los dos lados restantes del triángulo. Y tal sección será llamada una parábola
>
> Apolonio de Perge

Es Apolonio quien menciona que un espejo parabólico refleja de forma paralela los rayos emitidos desde su foco, propiedad usada hoy en día en las antenas satelitales. La parábola también fue estudiada por Arquímedes, nuevamente en la búsqueda de una solución para un problema famoso: la cuadratura del círculo, dando como resultado el libro *Sobre la cuadratura de la parábola*.

Una consecuencia de gran importancia es que la tangente refleja los rayos paralelos al eje de la parábola en dirección al foco. Las aplicaciones prácticas son muchas, como ser: las antenas satelitales y radiotelescopios aprovechan el principio concentrando señales recibidas desde un emisor lejano en un receptor colocado en la posición del foco.

La concentración de la radiación solar en un punto, mediante un reflector parabólico tiene su aplicación en pequeñas cocinas solares y grandes centrales captadoras de la energía solar

Análogamente, una fuente emisora situada en el foco, enviará un haz de rayos paralelos al eje: diversas lámparas y faros tienen espejos con superficies parabólicas reflectantes para poder enviar haces de luz paralelos emanados de una fuente en posición focal. Los rayos convergen o divergen si el emisor se desplaza de la posición focal.



La parábola refleja sobre el foco los rayos paralelos al eje. Análogamente, un emisor situado en el foco, enviará un haz de rayos paralelos al eje.

Los radiotelescopios concentran los haces de señales en un receptor situado en el foco. El mismo principio se aplica en una antena de radar

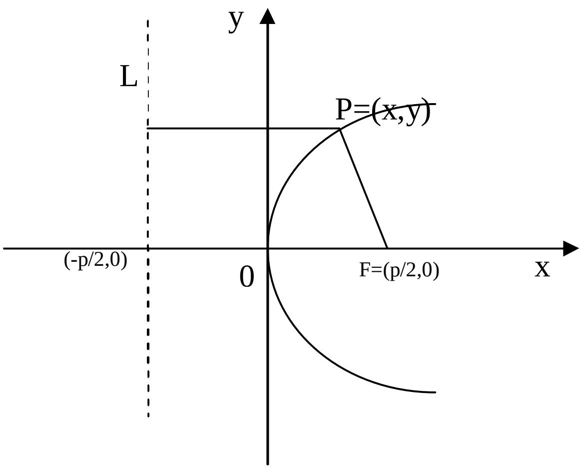
Cocina solar de concentrador parabólico. El mismo método se emplea en las grandes centrales captadoras de energía solar

Los faros de los automóviles envían haces de luz paralelos, si la bombilla se sitúa en el foco de una superficie parabólica

V.11-Ecuaciones de las cónicas en un sistema de coordenadas cartesianas

<u>V.11.1.- La Parábola. Definición. Gráfica y elementos</u>.

Dado un punto fijo F llamado foco y una recta fija llamada directriz , se llama parábola al conjunto de puntos P del plano o que equidistan del foco y de la directriz
Gráfica



$\|PF\| = d\,(P, L)$

$* \quad F = \left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad , p > 0$ directriz, $x = \frac{-p}{2}$

* si P pertenece a la parábola , su simétrico P' también es punto de la cónica

* 0 es el vértice

* es una cónica sin centro

V.11.2.- Ecuaciones de la parábola

Ecuación:

$\|PF\| =$ d (P , L ,) = x + $\frac{p}{2}$

Elevando al cuadrado y simplificando, se tiene: $y^2 = 2px$ (1)

Si considero un sistema 0x, 0y, donde el vértice $\vec{0} = (\alpha, \beta)$,
La (1) es $(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$

Al desarrollar esta última resulta

$y^2 - 2\beta y + \beta^2 = 2px - 2px$ o sea $y^2 - 2px - 2\beta y + (\beta^2 + 2p\alpha) = 0$

O sea una ecuación del tipo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con A= 0 y D $\neq$ 0

* si en cambio se hubiera elegido al eje y como eje de simetría, la ecuación la ecuación canónica seria $x^2 = 2 p y$

O sea $(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$

Desarrollando obtenemos

$x \ -2\alpha x + \alpha^2 = 2py - 2p\beta$
$x^2 - 2\alpha x - 2py + (\alpha^2 + 2p\beta) = 0$

Seria del tipo

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde ahora es C = 0 pero E $\neq$ 0

Nota: $\varepsilon = 1$ (excentricidad)

V.10.-Ejercicios y Problemas de Aplicación

1) En cada uno de los siguientes casos, halle la ecuación de la circunferencia:

a) C=(0,2) r=2

b) C=(-2,0) r=3

c) C=(2,2) y contiene al punto A=(4,5)

2) Halle la ecuación de la circunferencia de centro C=(2,-1) que pasa por el origen.

3) En cada uno de los siguientes casos determine el centro y el radio de la circunferencia:

a) $x^2 + y^2 -2y = 3$ b) $x^2 + y^2 -2x = 8$

c) $3x^2 + 3y^2 +6x = 1$ d) $2x^2 + 2y^2 + x +y = 0$

4) Obtenga la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos:

A= (2,3) B=(3,2) c=(-4,3)

5) Escriba la ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos (2,3) y (-1,6) con centro sobre $2x + 5y + 1 = 0$

6) Sea la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y -6 = 0$.Indique a que cónica corresponde y halle los elementos de la misma.

7) Sea la ecuación $x^2 + y^2 -2 x +6y +6 = 0$. Determine a que cónica corresponde y encuentre los elementos de la misma.

8) En cada uno de los siguientes ejercicios, obtenga la ecuación de la elipse de centro C, foco F y semieje mayor a.

Haga un gráfico y calcule la excentricidad en cada caso:

a) C= (0,0)	F= (0,2)	a=4
b) C= (-3,0)	F= (-3,2)	a=4
c) C= (-3,0)	F= (-3,2)	a=3
d) C= (2,2)	F= (-1,2)	a=10

9) Dadas las elipses:

a) $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$

b) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 136 = 0$

Obtenga sus elementos y grafíquelos.

10) Halle las coordenadas de los focos y los vértices de cada una de las siguientes elipses y efectúe un gráfico.

$$a)\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad b)\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$c)x^2+2y^2=2 \qquad d)3x^2+4y^2=6$$

11) Halle las coordenadas de los focos y los vértices de cada una de las siguientes hipérbolas y efectúe un gráfico aproximado.

$$a)4x^2-9y^2=36$$

$$b)16x^2-y^2=16$$

$$c)x^2-2y^2+2=0$$

12) Escriba las ecuaciones de las hipérbolas cuyos datos se dan a continuación:

a) Focos en (3,0) y (-3,0); vértice en (1,0)

b) Focos en (4,0) y (-4,0); vértice en (2,0)

c) Focos en (0,2) y (0,-2); vértice en (0,1)

13) Halle las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de casa una de las siguientes parábolas: a) $y^2= 8x$ b) $y^2= 2x$ c) $y^2= -6x$ d) $y^2+16x= 0$

14) Halle las ecuaciones de las parábolas de:

a) Foco (4,0) y directriz x = -4

b) Foco (1,0) y directriz x = -1

BIBLIOGRAFIA

"HISTORIA DE LAS MATEMATICAS II"

Jean-Paul Collette
Editorial : Siglo Veintiuno Editores

"LAS DESVENTURAS DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO"

Gregorio Klimovsky – Guillermo Boido
Editorial: aZ Editora.2005

"ALGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES"

David C. Lay
Editorial ; Pearson-Segunda Edición. 1999

"ALGEBRA LINEAL"

Ben Noble- Jams W. Daniel
Editorial: Prentice-Hall Hispanoamericana,S.A.1989

"ALGEBRA LINEAL CON GEOMETRIA" TOMO I y TOMO II"

Hirma Ruffiner- Lucrecia Etchemaite – Mercedes Martinelli
Editorial: Impreso en Argentina. 2000
I.S.B.N.O.C. – 987-43-2255-1. V.1- 987-43-2256-X

"VECTORES Y TENSORES"

Luis A. Santaló
Editorial : Eudeba-Octava Edición 1970

"ALGEBRA Y GEOMETRIA"

S.Gigena-F.Molina-D.Joaquin-O.Gómez-A.Vignoli
Editorial :Universitas. 2003

"ALGEBRA Y GEOMETRIA"

Eugenio Hernández
Editorial: Universidad A. de Madrid.1987

"GEOMETRIA ANALITICA EN FORMA VECTORIAL Y MATRICIAL"

Maria Helena Albino de Sunkel
Editorial : Nueva Librería S.R.L. 1984

"GEOMETRIA ANALÍTICA"

Charles H Lehman
Editorial : Limusa S.A. 1997

"ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA"

Dennis G. Zill-Jackeline M. Dewar
Editorial: McGraw-Hill- Interaméricana S.A. 2000

"ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA CON GEOMETRIA ANALITICA"

Earl W. Swokowski-Jeffery A. Cole
Editorial: Thomson- Learning. 2002

"SEPARATAS SOBRE ALGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES"

Eduardo Epstein
Apuntes de Cátedra. 1985. UNSE