

# Algoritmos para la estimación de volúmenes comerciales

*Algorithms for estimating merchantable volume*

G. Trincado<sup>1</sup>; V. Sandoval<sup>1</sup>

Recibido en marzo de 2001; aceptado en agosto de 2001

## RESUMEN

Se presentan dos metodologías alternativas para efectuar el cálculo de volumen comercial en la especie latifoliada *Nothofagus pumilio*. La primera de ellas corresponde a la utilización de una función de ahusamiento, requiriendo efectuar antes de su ajuste algunas modificaciones en la estructura de las variables y la segunda corresponde a la utilización de funciones "spline". Para ambas alternativas se evalúa su capacidad en la determinación de diámetros en altura, volumen acumulado y volumen total hasta la altura comienzo de copa, a través de estadísticos indicadores de error y sesgo probable. Se demuestra la factibilidad de emplear ambos métodos en la estimación de volúmenes.

**Palabras Clave:** spline, función de ahusamiento.

## ABSTRACT

Two alternative methodologies are presented to estimate the merchantable volume in *Nothofagus pumilio* a deciduous tree specie. The first one uses a taper equation, that requires some modifications in the structure of the variables before the fitting; and the second correspond to a "spline" function. For both of them the capacity to estimate diameters along the stem, accumulated volume and total volume until the crown base, using statistic indicators of error and bias were evaluated. Finally the factibility of using both proposed methods in the volume estimation is demonstrated.

**Key words:** spline, taper equation

## 1. INTRODUCCION

La producción maderera en Chile país se basa principalmente en plantaciones de especies exóticas de rápido crecimiento como son *Pinus radiata* D. Don y en especies del género *Eucalyptus* sp, las cuales son la base de materia prima del sector forestal. Además se cuenta con una importante reserva de bosques naturales, que podría a mediano y largo plazo pasar a formar parte del sector productivo. Dentro de éstos bosques naturales se tiene a los renovales, los cuales son bosques jóvenes de segundo crecimiento, con edades no mayores a 50 años, de pocas especies y de estructura simple (Donoso, 1991). Se estima que alcanzan a lo largo de todo el país una extensión total de 3,58 millones de hectáreas (CONAF y CONAMA, 1999). Dentro de los renovales destacan aquellas especies del género *Nothofagus*, que se considera representan un mayor valor comercial.

La importante superficie cubierta con bosques de segundo crecimiento y el valor económico de algunas de sus especies hace necesario contar con nuevas herramientas dasométricas que permitan estimar con una alta exactitud los volúmenes totales y desagregados por productos posibles de obtener de un bosque, con el fin de efectuar una mejor planificación en el manejo y utilización de estos recursos.

<sup>1</sup> Instituto de manejo forestal, Facultad de Ciencias Forestales. Casilla 567. Valdivia, Chile.

Hoy en día para un número importante de especies nativas existen sólo funciones de volumen que permiten realizar estimaciones de existencias comerciales o hasta un determinado índice de utilización. Sin embargo, durante los últimos años se han desarrollado para especies de latifoliadas algunos métodos alternativos basados en métodos tradicionalmente empleados para especies de coníferas. Dentro de éstos se tiene la utilización de funciones de ahusamiento propuestas por Fowler y Rennie (1988), Higuera (1994) y Trincado et al (1997).

Además existen técnicas de interpolación basadas en funciones matemáticas que pueden ser adecuadas como herramientas de estimación. Dentro de éstas se tienen las funciones *SPLINE*, las cuales permiten unir en forma suave y continua una serie de puntos o nodos. Debido a esta característica las funciones *SPLINE* han encontrado en el sector forestal una gran variedad de aplicaciones. Wahba (1976) citado por Goulding (1979) utilizó funciones *SPLINE* para adaptar una curva a un histograma y obtener una función probabilística de densidad empírica. Mas tarde Liu (1980) demostró que dada una serie de mediciones de radios distribuidos a lo largo del fuste, éstos permiten a partir de funciones *SPLINE* la construcción de modelos segmentados que aproximan la forma de fuste con mucha exactitud. Comprobándose que una función *SPLINE* estima el volumen con mayor exactitud y precisión que la fórmula de Smalian, utilizando mediciones de diámetro a intervalos irregulares efectuadas con dendrómetros ópticos (Goulding, 1979). Saborowski et al (1981) utiliza éste tipo de funciones en la estimación de volúmenes en plantaciones jóvenes de *Picea* y Nagel & Athari (1982) las utiliza para efectuar análisis fustales.

Este estudio compara y evalúa la capacidad predictiva de nuevas alternativas de estimación volumétrica como son las funciones de ahusamiento y funciones *SPLINE* en Lenga (*Nothofagus pumilio*).

## 2. MATERIAL Y MÉTODO

### 2.1 Base dendrométrica

La base dendrométrica consistió en una muestra destructiva de 70 árboles de *Nothofagus pumilio*, los cuales fueron obtenidos en el marco del proyecto Río Cóndor en la XII Región, Provincia de Tierra del Fuego, Chile. Para cada árbol se midió el diámetro del tocón con corteza ( $d_t$ ), diámetro a la altura del pecho con corteza ( $d_{1,3}$ ), diámetro de comienzo de copa con corteza ( $d_c$ ), altura de comienzo de copa ( $H_c$ ) y altura total ( $H_t$ ). Además se realizaron mediciones de altura ( $h_i$ ) y diámetro de la sección ( $d_i$ ), cada dos metros a partir de 1,3 m de altura hasta la altura de comienzo de copa. Estadística descriptiva de la base dendrométrica original se muestran en la Tabla 1.

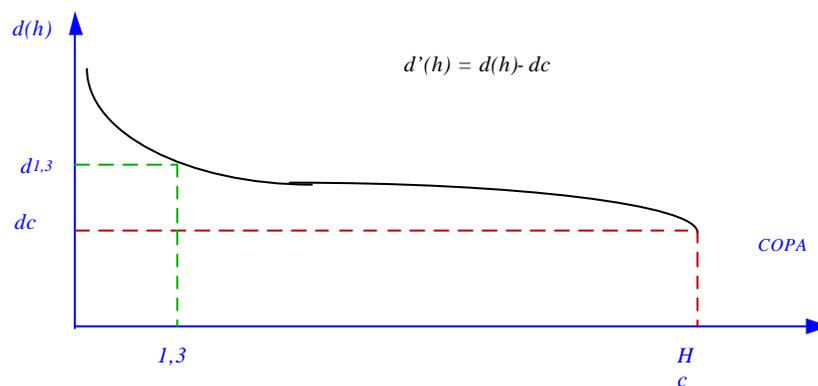
**Tabla 1.** Estadísticos descriptivos de árboles utilizados en el estudio.

<b>Variable</b>	<b><math>d_t</math> (cm)</b>	<b><math>d_{1,3}</math> (cm)</b>	<b><math>d_c</math> (cm)</b>	<b><math>H_c</math> (m)</b>	<b><math>H_t</math> (m)</b>
Media	40.13	37.03	24.16	11.26	20.67
Mínimo	22.60	19.70	10.78	3.80	14.40
Máximo	70.70	69.30	45.90	17.50	28.50
Desv. Est.	10.55	10.34	7.94	2.70	2.59

El volumen de cada árbol fue calculado hasta la altura de comienzo de copa, mediante la cubicación de cada una de las secciones en forma individual. El volumen de la primera sección fue calculado asimilando la forma de un cilindro y las secciones restantes mediante la fórmula de Smalian (Avery y Burkhart, 1994).

## 2.2 Funciones de Ahusamiento

Las funciones de ahusamiento son comúnmente empleadas en la determinación de volúmenes comerciales en coníferas, pudiendo ser utilizadas para el mismo fin en especies de latifoliadas. Para ello es necesario realizar algunas modificaciones de la variable dependiente antes de efectuar el ajuste del modelo. Esta modificación consiste en sustraer a cada diámetro medido a lo largo del fuste el diámetro a la altura de comienzo de copa  $d_c$  (Fowler y Rennie, 1988; Trincado, 1996). De ésta manera se logra para cada uno de los árboles muestras un perfil semejante al de las coníferas, presentado un radio igual a cero  $d_{(h=H_c)} = 0$  a la altura comienzo de copa, tal como se muestra en la Figura 1.



**Figura 1.** Representación esquemática de un perfil fustal hasta el comienzo de copa en latifoliadas

Una vez realizado el ajuste de las funciones es posible la determinación del diámetro real  $d_{(h)}$  simplemente sumando al diámetro transformado el diámetro a comienzo de copa :

$$d_{(h)} = d'_{(h)} + d_c \quad [1]$$

Aplicando la metodología anterior se evaluó la capacidad de modelar el perfil del fuste en latifoliadas utilizando el modelo propuesto por Bruce *et al* (1968), en su forma modificada :

$$\frac{d'_{(h)}}{d'_{1,3}} = b_0 X^{1.5} + b_1 d_{1,3} (X^{1.5} + X^3) + b_2 H_c (X^{1.5} + X^3) + b_3 d_{1,3} H_c (X^{1.5} + X^{32}) + b_4 H_c^{0.5} (X^{1.5} + X^{32}) + b_5 H_c^2 (X^{1.5} + X^{40}) \quad [2]$$

Donde :

$$\begin{aligned} d'_{1.3} &= (d_{1.3} - d_c) = \text{diámetro a 1.3 m modificado (cm);} \\ d'_{(h)} &= (d_{(h)} - d_c) = \text{diámetro a la altura } h_i \text{ modificado (cm);} \\ H_c &= \text{altura de comienzo de copa (m);} \\ b_i &= \text{Parámetros } (i = 1, \dots, k); \\ X &= \frac{(H_c - h_i)}{(H_c - 1.3)} \end{aligned}$$

Una vez ajustado el modelo es posible efectuar algebraicamente el cálculo de volúmenes entre dos alturas aplicando la fórmula para sólidos de revolución :

$$v_{(h_2, h_1)} = \frac{\mathbf{P}}{4} \int_{h_1}^{h_2} d_{(h)}^2 dh \quad \mathbf{0} \leq h_1 \leq h_2 ; h_2 \leq H_c \quad [3]$$

donde :  $d_{(h)}^2 = d'_{(h)}{}^2 + 2d'_{(h)} dc + dc^2$

### 2.3 Funciones “spline”

Una “spline” corresponde a una función polinómica de tercer grado que es ajustada entre cada par de puntos o nodos, los cuales forman en su conjunto un continuo (Sheid, 1991). Teniendo la particularidad de lograr una unión continua entre los segmentos que forman los pares de éstos puntos, evitando oscilaciones que ocurren normalmente al utilizar polinomios de alto grado (Burden *et al*, 1991). Si se considera una función de tercer grado la función matemática para cada uno de los segmentos ( $i=1, \dots, n$ ) presenta la siguiente forma:

$$S_i(x)^2 = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i(x - x_i) + \mathbf{c}_i(x - x_i)^2 + \mathbf{d}_i(x - x_i)^3 \quad [4]$$

Conociendo el valor de los coeficientes para cada uno de los segmentos es posible realizar el cálculo de volumen dentro de cada uno de ellos aplicando la siguiente fórmula :

$$v_{(h_{i+1}, h_i)} = \frac{\mathbf{P}}{4} \int_{h_i}^{h_{i+1}} S_i(x)^2 dh \quad [5]$$

El volumen total del segmento se calcula resolviendo la integral de [4] entre dos alturas:

$$v_{(h_{i+1}, h_i)} = \frac{\mathbf{P}}{4} \left[ \mathbf{a}_i (h_{i+1} - h_i) + \frac{\mathbf{b}_i}{2} (h_{i+1} - h_i)^2 + \frac{\mathbf{c}_i}{3} (h_{i+1} - h_i)^3 + \frac{\mathbf{d}_i}{4} (h_{i+1} - h_i)^4 \right] \quad [6]$$

La metodología utilizada para la aplicación práctica de las funciones “spline” consistió en realizar a lo largo del fuste cuatro mediciones de altura/diámetro. Estas correspondieron al diámetro de tocón ( $d_t$ ), el diámetro a 1.3 m ( $d_{1.3}$ ), un diámetro superior ( $d_s$ ) medido a una cierta altura relativa y el diámetro a la altura de comienzo de copa ( $d_c$ ).

El volumen total hasta la altura comienzo de copa se obtuvo a partir de la suma de las funciones integradas para cada uno de los tres intervalos :

$$V_{(H_c, H_t)} = \int_{H_t}^{H_{1.3}} S_1(x)^2 dh + \int_{H_{1.3}}^{H_s} S_2(x)^2 dh + \int_{H_s}^{H_c} S_3(x)^2 dh \quad [7]$$

donde :

$S_i(x)$  = función correspondiente a cada intervalo ( $i = 1, 2, 3$ );

$x$  = punto de evaluación de la función;

$H_t, H_{1.3}, H_s, H_c$  = alturas límite de cada intervalos.

Para el ajuste de las funciones “spline” se consideraron diámetros superiores ( $d_s$ ) a alturas relativas correspondientes al 30 y 40% de la altura comienzo de copa, las cuales se obtuvieron mediante interpolación lineal. Esto con el fin de determinar la mejor altura relativa de medición para el diámetro superior.

Es necesario mencionar que el ajuste de las funciones “spline” se realiza en forma individual para cada árbol, siendo necesaria la implementación de rutinas computacionales (Feldman, 1992)

## 2.4 Proceso de validación de funciones

Para comparar los modelos se emplearon medidas de error absoluto y sesgo probable, correspondientes a la raíz cuadrada del error medio cuadrático (REMC) y la diferencia agregada (DIFA) respectivamente (Real y Moore, 1986).

$$\text{Raíz del error medio cuadrático (REMC):} \quad \sqrt{\sum (y_o - y_e)^2 / n} \quad [8]$$

$$\text{Diferencia agregada (DIFA)} \quad : \quad \sum (y_o - y_e) / n \quad [9]$$

donde  $y_o$  = valor observado,  $y_e$  = valor estimado y  $n$  = número total de observaciones.

Debido a que no se contaba con una serie de datos independientes para la validación de los algoritmos propuestos fue necesario considerar la misma base ajuste para realizar una evaluación de la exactitud y sesgo de las estimaciones.

## 3. RESULTADOS

Se presentan los resultados obtenidos del ajuste de la función de Bruce et al (1968) con la modificación propuesta y se analizan las capacidades predictivas en las estimaciones de diámetros en altura, volumen acumulado y volumen fustal hasta altura comienzo de copa, entre la función de ahusamiento y las funciones “spline” ajustadas con diámetros medidos a la altura del tocón ( $d_t$ ), diámetro a 1.3 m ( $d_{1.3}$ ), diámetros superiores ( $d_s$ ) a 30 o 40% de la altura de comienzo de copa ( $H_s$ ) y al diámetro comienzo de copa ( $d_c$ ).

### 3.1 Estimación de coeficientes función de ahusamiento

La Tabla 2 presenta los coeficientes estimados y medidas de bondad de ajuste para el modelo de Bruce *et al* (1968).

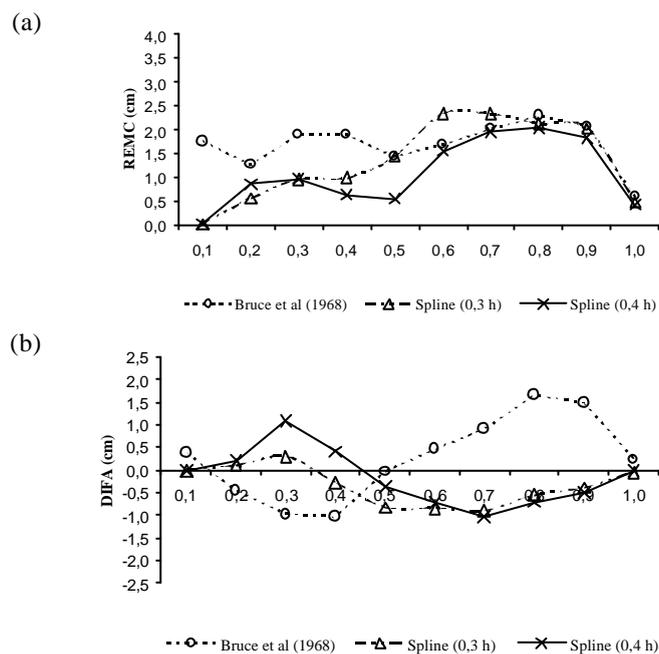
**Tabla 2.** Coeficientes estimados y medidas de bondad de ajuste para el modelo de Bruce *et al* (1968)

Coeficientes						Bondad de Ajuste	
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$R^2$ <sup>(a)</sup>	$S_{y,x}$ <sup>(b)</sup>
1.02860209	0.04478103	0.00527711	-8.919 e-0.5	-0.00381884	6.0552e-05	0.97	0.13

a) Coeficiente de determinación. b) Error estándar de la estimación

### 3.2 Estimación diámetros a diferentes alturas relativas

La figura 2 muestra el error y sesgo probable en la estimación de diámetros a lo largo del fuste para diferentes alturas relativas. Para éste estudio la altura del fuste de cada uno de los árboles se dividió en 10 rangos de alturas relativas (10%, 20%, etc), con respecto a la altura comienzo de copa ( $H_c$ ).



**Figura 2.** Medidas de (a) error y (b) sesgo en la estimación de diámetros en altura.

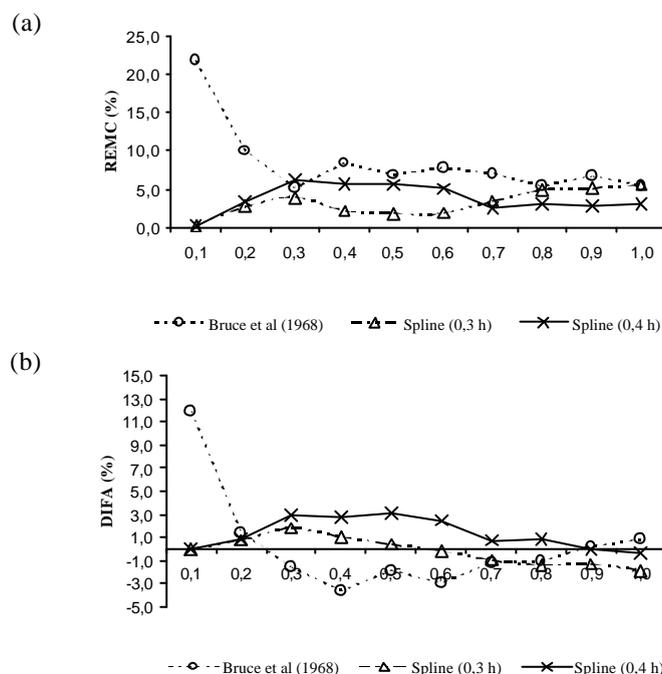
A partir de la Figura 2(a) se puede observar que los menores errores en la estimación de diámetros superiores a lo largo del fuste se logran a través del uso de funciones *SPLINE*, sin embargo esta funciones muestran una tendencia de aumentar el error con la altura relativa, salvo en la última porción donde se produce una disminución del error debido a que existe una medición real a la altura de comienzo de copa. La función de ahusamiento presenta en general mayores

errores pero estos son homogéneos a lo largo del fuste, disminuyendo éstos en la sección superior debido a la razón dada anteriormente para el caso de *SPLINE*.

En cuanto al sesgo, que se presenta en la Figura 2(b), se puede apreciar un comportamiento inverso a la función de ahusamiento y las *SPLINE*. La función de ahusamiento tiende a sobrestimar los diámetros en la parte inferior y ha subestimar en la parte superior. Las funciones *SPLINE* tienden contrariamente a subestimar en la parte inferior y sobrestimar en las partes superiores.

### 3.3 Estimación de volumen acumulado

La figura 3 presenta medidas de error y sesgo probable en la estimación de volumen acumulado hasta diversas alturas relativas.

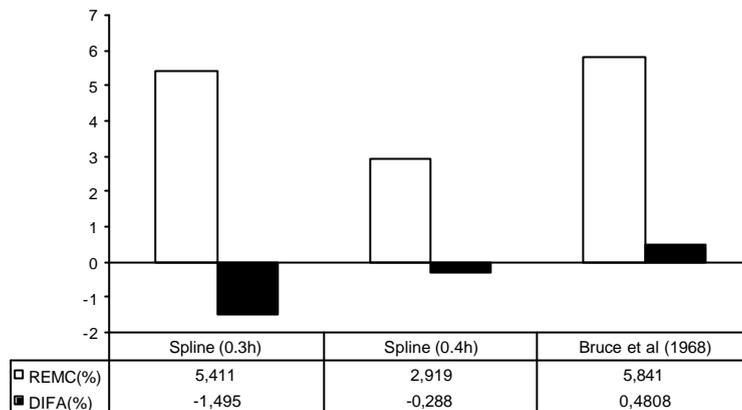


**Figura 3.** Medidas de error y sesgo en la estimación de volumen acumulado

La Figura 3(a) muestra que los menores errores a lo largo del fuste se presentan en las funciones *SPLINE*, siendo a lo largo del fuste no mayores al 5%. La función de ahusamiento presenta los mayores errores, especialmente en la parte basal del fuste. Por otro lado la Figura 3(b) presenta el comportamiento de las funciones en cuanto al sesgo, observándose una subestimación de los volúmenes acumulados al emplear funciones *SPLINE* y una sobrestimación al utilizar la función de ahusamiento hasta una altura relativa del 90%.

### 3.4 Estimación de volumen total fustal

La Figura 4 muestra medidas de error y sesgo probable en la estimación de volumen total fustal hasta la altura comienzo de copa.



**Fig. 4.** Error y sesgo probable en la estimación de volumen total fustal hasta la altura comienzo de copa.

Se puede apreciar de la figura 4 que los menores errores se logran al utilizar una función *SPLINE* considerando la medición de un diámetro superior a una altura relativa del 40%. En cuanto al sesgo se aprecia que las funciones *SPLINE* tienden a sobrestimar el volumen total, contrariamente a la función de ahusamiento que tiene de subestimar. Se aprecia que nuevamente los menores valores de sesgo se obtienen al utilizar *SPLINE* con una altura relativa del 40%.

## 4. CONCLUSIONES

En las estimaciones de diámetros se presentan los menores errores al utilizar funciones *SPLINE*, sin embargo éstos aumentan con la altura relativa. Por otro lado la función de ahusamiento empleada muestra mayores errores pero más homogéneos a lo largo del fuste. En la estimación de volúmenes acumulados nuevamente las funciones “spline” presentaron menores errores y sesgo, especialmente en la parte basal del fuste en comparación a la función ahusamiento.

En relación a la mejor altura relativa para medir el diámetro superior ( $dc$ ), se puede indicar que para la estimación del volumen total el “spline” que considera la medición de un diámetro superior a un 40% de la altura de comienzo de copas, mostró menores errores y sesgos probables que la correspondiente a un 30% de dicha altura.

En general se puede indicar que las funciones “spline” tendieron a sobrestimar y la función de ahusamiento a subestimar los volúmenes comerciales.

**REFERENCIAS**

- Avery, T. E.; H. E. Burkhart. 1994. "Forest measurements". Fourth Edition, Mc Graw-Hill. 339p.
- Bruce, D. R.; C. Curtis; Vancoevering. 1968. "Development of a system of taper and volume tables for red alder". *Forest. Science*. 14(3):339-350.
- Burden, R. L.; J. D., Faires.; A. C., Reynolds. 1991. "Análisis numérico". Boston, Massachusetts, Prindle, Weber y Schmidt. 610 p.
- CONAF; CONAMA. 1999. "Catastro y evaluación de recursos vegetacionales de Chile: Informe nacional con variables ambientales". CONAF/CONAMA. 89p.
- Donoso, P. 1991. "Diagnóstico de la situación actual del bosque nativo de Chile". Trabajo presentado para la Comisión del Medio Ambiente de la Honorable Cámara de Diputados de Chile. 59p.
- Feldman, D. 1992. "Turbo-Pascal-Quelletexte zur Ingenieur-Mathematik". Feldman Verlag. 364p.
- Fowler, J. H.; J. C., Rennie. 1988. "Merchantable height in lieu of total height in stem profile equations". *For. Sci.* 34(2): 505-511.
- Goulding, C. J. 1979. "Cubic spline curves and calculation of volume of sectionally measured trees". *N. Z. J. For. Sci.* 9 (1): 89-99.
- Higuera, C., 1994. "Funciones de volumen y ahusamiento para Roble (*Nothofagus obliqua* (Mirb.) Oerst) y Hualo (*Nothofagus glauca* (Phil.) Kraser)". Tesis Ingeniería Forestal, Facultad de Cs. Forestales, Universidad Austral de Chile. 74p.
- Liu, C. J. 1980. "Log volume estimation with spline approximation". *For. Sci.* 26.(3): 361-369.
- Nagel, J.; S., Athari. 1982. "Stammanalyse und Ihre Durchführung". *Allg. Forst. u. J.-Ztg.* 179-182.
- Real, P. L.; J. A. Moore. 1986. "An individual tree system for Douglas-fir in the inland north-west". In Ek, Ar.R., Shifley, S.R., Burk, T.E. "Forest growth modelling and prediction". *Proceeding of IUFRO Conference, 24-28 August 1986, Minneapolis, Minnesota, USDA Forestry Service General Technical Report NC-120.* 1037-44 p.
- Saborowski, J.; B., Sloboda.; A., Junge. 1981. "Darstellung von Schaftformen durch Kubische Spline-Interpolation und Reduktion der Stützstellenanzahl". *Forstarchiv.* 127-130
- Sheid, F. 1991. "Métodos numéricos". 2da Edición. México. Mc Graw Hill. 709 p.
- Trincado, G. 1996. "Modellierung der Schaftform von Fichten (*Picea abies*) und Buchen (*Fagus sylvatica*)". *Wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des Grades Magister der tropischen Forstwirtschaft der Georg August Universität Goettingen.* 50p.
- Trincado, G.; V. Tewari; K. Y. Gadaw. 1997. "Comparison of three stem profile equations for *Quercus robur* L". *South African Forestry Journal* 177. 23-30

